ПРАЦІ
МІЖНАРОДНОГО ГЕОМЕТРИЧНОГО ЦЕНТРУ

ТРУДЫ
МЕЖДУНАРОДНОГО ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ЦЕНТРА

PROCEEDINGS
of the
INTERNATIONAL GEOMETRY CENTER

ПРАЦІ
МІЖНАРОДНОГО ГЕОМЕТРИЧНОГО ЦЕНТРУ

ТРУДЫ
МЕЖДУНАРОДНОГО ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ЦЕНТРА

PROCEEDINGS
of the
INTERNATIONAL GEOMETRY CENTER

Том 3, № 1, 2010

Одеса – 2010

ЗМІСТ

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

Праці міжнародного геометричного центру | Proceedings of the International Geometry Center
2010. – 3 (1): 7-12

Torsion tensors of the connections on Grassman's manifold and centered Grassman's manifold

Olga Belova

Abstract. Grassman's manifold $V = Gr(m,n)$ (space of m–planes L_m) is considered in the projective space P_n. Centered Grassman's manifold (space of centered planes, passing through one point) is considered in the centerprojective space P_n^*. Principal fiber bundles are associated with them. A fundamental-group connections are given in that fiberings. The torsion objects of the connections are introduced. It is shown *[1]*, *[2]*, that the given objects are tensors.

Introduction

We shall put a projective n–space P_n to moving frame $\{A, A_I\}$ $(I, J, K, ... = \overline{1,n})$, which infinitesimal displacements are defined by the formulas:

$$dA = \theta A + \omega^I A_I, \quad dA_I = \theta A_I + \omega_I^J A_J + \omega_I A.(1)$$

The Pfaffian forms ω^I, ω_J^I, ω_I satisfy the Cartan's structure equations of the projective group $GP(n)$, acting in the projective space P_n:

$$D\omega^I = \omega^J \wedge \omega_J^I, D\omega_J^I = \omega_J^K \wedge \omega_K^I + \delta_J^I \omega_K \wedge \omega^K + \omega_J \wedge \omega^I, D\omega_I = \omega_I^J \wedge \omega_J.(2)$$

Grassman's manifold

In the space P_n we shall consider Grassman's manifold $V = Gr(m,n)$ of all $m-$ dimensional planes L_m. Let's produce specialization of the moving frame $\{A, A_a, A_\alpha\}$ ($a,\ldots = \overline{1,m}$; $\alpha,\ldots = \overline{m+1,n}$), putting the tops A, A_a on the plane L_m. The equations of stationarity of the $m-$plane L_m have the form: $\omega^\alpha = 0, \quad \omega^\alpha_a = 0$. The dimensionality of Grassman's manifold is equal to the quantity of basis forms, i.e.

$$dim V = (n-m)(m+1).$$

The principal fiber bundle $G(V)$ is constructioned over Grassman's manifold V, the subgroup G of stationarity of the plane L_m is the typical fiber and Grassman's manifold V is the base. The projective group $GP(n)$ is the fibering and the projection $\pi : GP(n) \to V$ maps to any element of group $GP(n)$ the plane $L_m \in V$ which is invariant under an action of this element. The principal fiber bundle $G(V)$ has principal factor fiber bundles $H(V)$ The typical fiber of the $H(V)$, the factor group H, actions on the plane L_m and on the dual plane.

In the principal fiber bundle $G(V)$ we shall set fundamental–group connection by G.F. Laptev's method. The group connection object Γ has [3] subobject

$$\Gamma_1 = \{ L^a_\alpha, \Gamma^{ab}_\alpha, L^a_{b\alpha}, \Gamma^{ac}_{b\alpha}, \Gamma_{a\alpha}, \Pi^b_{a\alpha}, L^\alpha_{\beta\gamma}, \Gamma^{\alpha a}_{\beta\gamma} \},$$

which giving connection in the factor fibering $H(V)$ by means of the forms

$$\tilde\omega^a = \omega^a - L^a_\alpha \omega^\alpha - \Gamma^{ab}_\alpha \omega^\alpha_b, \quad \tilde\omega^a_b = \omega^a_b - L^a_{b\alpha}\omega^\alpha - \Gamma^{ac}_{b\alpha}\omega^\alpha_c,$$

$$\tilde\omega_a = \omega_a - \Gamma_{a\alpha}\omega^\alpha - \Pi^b_{a\alpha}\omega^\alpha_b, \quad \tilde\omega^\alpha_\beta = \omega^\alpha_\beta - L^\alpha_{\beta\gamma}\omega^\gamma - \Gamma^{\alpha a}_{\beta\gamma}\omega^\gamma_a.$$

Substituting into the structure equations of the basic forms ω^α, ω^α_a of Grassman's manifold the connection forms, we come to the following equations:

$$D\omega^\alpha = -\omega^\alpha_a \wedge \tilde\omega^a + \omega^\beta \wedge \tilde\omega^\alpha_\beta + S^\alpha_{\beta\gamma}\omega^\beta \wedge \omega^\gamma + S^{\alpha a}_{\beta\gamma}\omega^\beta \wedge \omega^\gamma_a + S^{\alpha ab}_{\beta\gamma}\omega^\beta_a \wedge \omega^\gamma_b,$$

$$D\omega^{\alpha}_{a} = -\omega^{\alpha}_{b} \wedge \widetilde{\omega}^{b}_{a} + \omega^{\beta}_{a} \wedge \widetilde{\omega}^{\alpha}_{\beta} - \omega^{\alpha} \wedge \widetilde{\omega}_{a} + S^{\alpha}_{a\beta\gamma}\omega^{\beta} \wedge \omega^{\gamma} + S^{\alpha b}_{a\beta\gamma}\omega^{\beta} \wedge \omega^{\gamma}_{b} + S^{\alpha bc}_{a\beta\gamma}\omega^{\beta}_{b} \wedge \omega^{\gamma}_{c},$$

where the components of object S are expressed under the formulas:

$$S^{\alpha}_{\beta\gamma} = L^{\alpha}_{[\beta\gamma]}, \quad S^{\alpha a}_{\beta\gamma} = \Gamma^{\alpha a}_{\beta\gamma} + \delta^{\alpha}_{\gamma} L^{a}_{\beta}, \quad S^{\alpha ab}_{\beta\gamma} = -\delta^{\alpha}_{\lfloor\beta}\Gamma^{\lceil ab}_{\gamma}], \quad S^{\alpha}_{a\beta\gamma} = -\delta^{\alpha}_{[\beta}\Gamma_{a\gamma]},$$

$$S^{\alpha b}_{a\beta\gamma} = -\delta^{\alpha}_{\beta}\Pi^{b}_{a\gamma} + \delta^{\alpha}_{\gamma}L^{b}_{a\beta} - \delta^{b}_{a}L^{\alpha}_{\gamma\beta}, \quad S^{\alpha bc}_{a\beta\gamma} = -\delta^{\alpha}_{\lfloor\beta}\Gamma^{\lceil bc}_{a\gamma}] + \delta^{\lceil b}_{a}\Gamma^{\alpha c}_{\lfloor\beta\gamma}]. \quad (3)$$

Square brackets mean antisymmetrization on extreme indexes. The right parts of the given equalities contain only components of subobject Γ_1, we shall name, therefore, object S the torsion object of subconnection Γ_1.

Taking into account the differential comparisons of the components of subobject Γ_1 [3], we come to comparisons modulo basic forms ω^{α}, ω^{α}_{a}:

$$\Delta S^{\alpha}_{\beta\gamma} + S^{\alpha a}_{[\beta\gamma]}\omega_{a} + S^{\alpha}_{a[\beta\gamma]}\omega^{a} \equiv 0, \quad \Delta S^{\alpha a}_{\beta\gamma} - S^{\alpha a}_{b\beta\gamma}\omega^{b} + 2S^{\alpha ba}_{\beta\gamma}\omega_{b} + 2S^{\alpha}_{\beta\gamma}\omega^{a} \equiv 0,$$

$$\Delta S^{\alpha ab}_{\beta\gamma} - S^{\alpha ab}_{c\beta\gamma}\omega^{c} - S^{\alpha\lceil a}_{\lfloor\gamma\beta\rfloor}\omega^{b\rceil} \equiv 0, \quad \Delta S^{\alpha}_{a\beta\gamma} + S^{ab}_{a[\beta\gamma]}\omega_{b} - S^{\alpha}_{\beta\gamma}\omega_{a} \equiv 0,$$

$$\Delta S^{\alpha b}_{a\beta\gamma} + S^{\alpha}_{a\beta\gamma}\omega^{b} + 2S^{\alpha cb}_{a\beta\gamma}\omega_{c} - S^{\alpha b}_{\beta\gamma}\omega_{a} \equiv 0, \quad \Delta S^{\alpha bc}_{a\beta\gamma} - S^{\alpha bc}_{\beta\gamma}\omega_{a} - S^{\alpha\lceil b}_{a\lfloor\gamma\beta\rfloor}\omega^{c\rceil} \equiv 0,$$

from which it follows

Theorem 1 *The torsion object* $S = \{S^{\alpha}_{\beta\gamma}, S^{\alpha a}_{\beta\gamma}, S^{\alpha ab}_{\beta\gamma}, S^{\alpha}_{a\beta\gamma}, S^{\alpha b}_{a\beta\gamma}, S^{\alpha bc}_{a\beta\gamma}\}$ *of the subconnection* Γ_1 *of the fundamental–group connection* Γ *on Grassman's manifold* $Gr(m,n)$ *of* m*–dimensional planes in the projective space* P_n *is a tensor and none proper subset of it components is not a tensor.*

Centered Grassman's manifold

In the space P_n we shall consider centered Grassman's manifold $V^0 = Gr^0(m,n)$ (a family of m–dimensional planes, passing through one point). Let's produce specialization of the moving frame $\{A, A_a, A_\alpha\}$, putting the top A in this point and the tops A_a on the centered plane $L_m^* = [A, A_a]$. At fixing a point A we have identities $\omega^I = 0$, transforming the space P_n in centerprojective space P_n^*. From the formulas *(1)* we can see that the equations of stationarity of the plane $L_m^* \in V^0$ have the form: $\omega_a^\alpha = 0$. The forms ω_a^α for the centered Grassman's manifold V^0 are basics, $dim V^0 = m(n-m)$. From *(2)* we have the structure equations of the basic forms:

$$D\omega_a^\alpha = \omega_b^\beta \wedge (\delta_a^b \omega_\beta^\alpha - \delta_\beta^\alpha \omega_a^b).$$

The principal fiber bundle $G^*(V^0)$ is constructioned over centered Grassman's manifold V^0, the subgroup G^* of stationarity of the plane $L_m^* \in V^0$ *[4]* is the typical fiber. In the principal fiber bundle $G^*(V^0)$ we shall set a fundamental–group connection by G.F. Laptev with help of the forms:

$$\tilde{\omega}_b^a = \omega_b^a - \Gamma_{b\alpha}^{ac}\omega_c^\alpha, \quad \tilde{\omega}_\beta^\alpha = \omega_\beta^\alpha - \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha a}\omega_a^\gamma, \quad \tilde{\omega}_\alpha^a = \omega_\alpha^a - \Gamma_{\alpha\beta}^{ab}\omega_b^\beta,$$

$$\tilde{\omega}_a = \omega_a - \Gamma_{a\alpha}^b \omega_b^\alpha, \quad \tilde{\omega}_\alpha = \omega_\alpha - \Gamma_{\alpha\beta}^a \omega_a^\beta,$$

in which there are the components of the connection object Γ *[4]*.

Substituting into the structure equations of the basic forms ω_a^α of the manifold V^0 the forms of dual line connections $\tilde{\omega}_b^a$, $\tilde{\omega}_\beta^\alpha$, we come to the following equations:

$$D\omega_a^\alpha = \omega_b^\beta \wedge (\delta_a^b \tilde{\omega}_\beta^\alpha - \delta_\beta^\alpha \tilde{\omega}_a^b) + S_{a\beta\gamma}^{\alpha bc}\omega_b^\beta \wedge \omega_c^\gamma,$$

where the components of object S are expressed under the formulas:

$$S_{a\beta\gamma}^{\alpha bc} = \delta_a^{[b}\Gamma_{[\beta\gamma]}^{\alpha c]} - \delta_{[\beta}^\alpha \Gamma_{a\gamma]}^{[bc]}.$$

This object S is a torsion object of the pair of dual line connections $\{\Gamma_{b\alpha}^{ac}, \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha a}\} \subset \Gamma$. Taking into account the differential comparisons of the components $\Gamma_{b\alpha}^{ac}, \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha a}$ of the connection object Γ, we come to comparisons modulo basic forms:

$$\Delta S^{\alpha bc}_{a\beta\gamma} \equiv 0.$$

Theorem 2 *The torsion object* $S=\{S^{\alpha bc}_{a\beta\gamma}\}$ *of the pair of dual line connections of centered Grassman's manifold* $Gr^0(m,n)$ *is a tensor.*

Remark 3 *The space* Π *of all centered* $m-$ *dimensional planes was studied in the work* $[5]$ *. It is said that the torsion object of the group subconnection in the space* Π *is quasi–tensor. At normalization of the space of centered spaces this quasi–tensor becomes a tensor.*

References

Белова О.О.: Тензор кручения групповой подсвязности на многообразии Грассмана. Тез. докл. межд. конф. "Геометрия в Одессе – 2004. Диф. геом. и ее применения". Одесса, 8 – 10 (2004)

Белова О.О.: Тензор кручения пары двойственных линейных связностей центрированного многообразия Грассмана. Тез. докл. межд. конф. "Геометрия в Одессе – 2006". Одесса, 36 – 37 (2006)

Белова О.О.: Связность в расслоении, ассоциированном с многообразием Грассмана. Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, (31) 8 – 11 (2000)

Белова О.О.: Связность в расслоении, ассоциированном с центрированным многообразием Грассмана. Тез. докл. межд. семин. "Геометрия в Одессе – 2005. Диф. геом. и ее применение". Одесса, 13 – 15 (2005)

Белова О.О.: Квазитензор кручения групповой подсвязности в пространстве центрированных плоскостей. Сб.трудов Межд. геом. семин. им.

Г.Ф. Лаптева. Пенза, 5 – 8 (2004)

Olga Belova

I. Kant State University of Russia (Kaliningrad, Russia)

E-mail address : geometry@albertina.ru

Праці міжнародного геометричного центру *Proceedings of the International Geometry Center*
2010. – 3 (1): 13-22

Псевдо-евклидовы и евклидовы движения

Милка А.

Аннотация. Излагается новая геометрия псевдоевклидовых движений. Она инициируется известными преобразованиями А.В. Погорелова пар изометричных поверхностей в неевклидовых пространствах. Расширение области применения этих преобразований установливает прямые и естественные связи между псевдоевклидовыми и евклидовыми движениями, выясняет определяющую роль лоренцева инварианта движения - квадратичной длины вектора и дополняет результаты Г. Минковского о геометрических основаниях специальной теории относительности А. Эйнштейна.

Ключевые слова: эллиптическое и гиперболическое пространства, жесткость выпуклых поверхностей, преобразования пар изометричных поверхностей, псевдоевклидовы движения, евклидова интерпретация псевдоевклидовых движенийРабота поддержана "Благотворительным фондом АВЕК" (г. Харьков).

Преобразования Погорелова

В 1958 г. Погореловым для четырехмерных пространств были найдены удивительно простые и эффективные геометрические функции [1]. Ими преобразовывалась пара изометричных поверхностей (или движение) в эллиптическом или гиперболическом пространстве в пару изометричных поверхностей (соответственно в движение) в евклидовом пространстве. Ими также преобразовывалась пара изометричных поверхностей (или движение) в евклидовом пространстве в пару изометричных поверхностей (соответственно в движение) в эллиптическом или гиперболическом пространстве. Назначением преобразований являлось перенесение на неевклидовы пространства установленной для евклидова пространства теоремы об однозначной определенности (жесткости) общих замкнутых выпуклых поверхностей их внутренней метрикой [2].

Однако, положительный результат был достигнут только для эллиптического пространства [3]. Для пространства Лобачевского соответствующая теорема о жесткости длительное время - до 1980 г.; Милка [4], решение проблемы Погорелова [2] - оставалась недоказанной. Трудности состояли в том, что в гиперболическом варианте рассматриваемые поверхности преобразовывались в евклидово пространство в невыпуклые поверхности. Применить в этом случае теорему о жесткости для евклидова пространства, по аналогии с эллиптическим вариантом, оказалось невозможным. Надо было искать другое решение. Решение было получено в [4] переходом к локальному рассмотрению изометричных выпуклых поверхностей с привлечением метода вложения Решетняка [5], использованием тех же преобразований Погорелова и применением геометрического принципа максимума Погорелова [2].

Чтобы придти к такому решению необходимо было "...разобраться в создавшемся положении, научиться выделять то существенное, что относится к самим изучаемым объектам [изометрия и движение], и отбрасывать то случайное, что привнесено произвольным выбором..." [6]. Необходимо было качественно объяснить и геометрию преобразований изометричных поверхностей, и определяющие параметры движений в евклидовом и псевдоевклидовом пространствах, с которыми связаны эти преобразования, и взаимную зависимость этих движений. Особый интерес вызывала геометрия псевдоевклидовых движений при расширении области применения указанных преобразований. Действительно, этими преобразованиями гиперболические движения - через евклидовы движения - отображаются в эллиптические движения. Тем самым индуцируется отображение вращений из псевдоевклидова в евклидово пространство. Исследование свойств отображения движений, проведенное в работе [4] для решения проблем изометрических преобразований, предоставило конструктивную информацию и о самих движениях. На этом основании нами излагается геометрия псевдоевклидовых движений, которая дополняет классические результаты.

Геометрия псевдоевклидовых движений

Рассматривается псевдоевклидово пространство E_s^{n+s} размерности $n+s$ с индексом инерции s. Пусть e_i ($i=1,\dots,n+s$) - ортонормированный базис в E_s^{n+s} из единичных e_i ($i=1,\dots,n$) и мнимоединичных e_i ($i=n+1,\dots,n+s$) взаимно ортогональных векторов. Далее применяются обозначения: для вектора z с координатами $z_1,\dots,z_n$, $z_{n+1},\dots,z_{n+s}$ - $z=z_1e_1+\dots+z_ne_n+z_{n+1}e_{n+1}+\dots+z_{n+s}e_{n+s}$; для скалярного произведения векторов x и y - $xy=x_1y_1+\dots+x_ny_n-x_{n+1}y_{n+1}-\dots-x_{n+s}y_{n+s}$; для квадратичной длины вектора z - $z^2=z_1^2+\dots+z_n^2-z_{n+1}^2-\dots-z_{n+s}^2$. Нас интересуют преобразования E_s^{n+s} в себя, для упрощения - с неподвижным началом отсчета векторов o, сохраняющие квадратичные расстояния между точками. Очевидно, индуцируемые такими преобразованиями преобразования векторов сохраняют скалярные произведения.

Лемма 1. *Пусть* $\varphi: E_s^{n+s}\to E_s^{n+s}$ *- преобразование, сохраняющее квадратичные расстояния между точками. И пусть* $e_i=\varphi(e_i)=\sum_j a_{ij}e_j$ *- соответствующее преобразование базисных векторов. Тогда векторы* e_i *-*

линейно независимые и матрица $\|a_{ij}\|$ *- ортогональная; строки матрицы представляют единичные* $(i=1,...,n)$ *и мнимоединичные* $(i=n+1,...,n+s)$ *взаимно ортогональные векторы.*

Доказательство. Достаточно установить линейную независимость векторов e_i. Пусть эти векторы - линейно зависимые. Тогда выполняется равенство, в котором не все константы λ и μ равны нулю: $\lambda_1 e_1 + ... + \lambda_n e_n = \mu_1 e_{n+1} + ... + \mu_s e_{n+s}$. Перейдем к равенству квадратов векторов: $\lambda_1^2 + ... + \lambda_n^2 = -\mu_1^2 - ... - \mu_s^2$. В этом равенстве слева - неотрицательная, справа - неположительная величины. Следовательно, все константы λ и μ равны нулю. Пришли к противоречию, и Лемма доказана.

Теорема 1. *Преобразование* $\varphi: E_s^{n+s} \to E_s^{n+s}$, *сохраняющее квадратичные расстояния между точками, есть линейное взаимно однозначное отображение* $x = \sum \bar{x}_i e_i \to x = \sum x_i e_i$ *пространства* E_s^{n+s} *на себя. Это преобразование представляет псевдоевклидово движение - вращение вокруг начала* o. *Оно описывается аналитически системой линейных уравнений с ортогональной матрицей:*

$$\begin{array}{lcl}
\bar{x}_1 & = & a_{11} \cdot x_1 + ... + a_{1n} \cdot x_n - a_{1n+1} \cdot x_{n+1} - ... - a_{1n+s} \cdot x_{n+s} \\
 & ... & \\
\bar{x}_n & = & a_{n1} \cdot x_1 + ... + a_{nn} \cdot x_n - a_{nn+1} \cdot x_{n+1} - ... - a_{nn+s} \cdot x_{n+s} \\
\bar{x}_{n+1} & = & -a_{n+11} \cdot x_1 - ... - a_{n+1n} \cdot x_n + a_{n+1n+1} \cdot x_{n+1} + ... + a_{n+1n+s} \cdot x_{n+s} \; (*) \\
 & ... & \\
\bar{x}_{n+s} & = & -a_{n+s1} \cdot x_1 - ... - a_{n+sn} \cdot x_n + a_{n+sn+1} \cdot x_{n+1} + ... + a_{n+sn+s} \cdot x_{n+s}
\end{array}$$

Доказательство. Раскрываем систему равенств $(x-e_i)^2 = (x-e_i)^2$ ($i=1,...,n+s$). Получаем однозначно разрешимую систему линейных уравнений (*) для координат вектора x с отличным от нуля - по лемме 1 - определителем. Теорема доказана.

Далее будет удобно рассматривать систему уравнений (*) не как интерпретацию движения $\varphi : x \to x$, а как представление обратного ему движения $\varphi^{-1} : x \to x$ в пространстве E_s^{n+s}, данное линейным преобразованием (*).

Лемма 2. *Диагональные подматрицы матрицы движения* (*) *с положительными коэффициентами при элементах* a_{ij} *- невырожденные, они имеют не равные нулю определители.*

Доказательство. Его достаточно изложить - здесь подматрицы эквивалентны - для левой верхней диагональной подматрицы. Допустим, что утверждение леммы не выполняется. Тогда столбцы этой подматрицы будут линейно зависимыми с некоторыми коэффициентами по порядку x_1,..., x_n, не все из которых равны нулю. Подставим в уравнения движения (*) координаты вектора $(x_1,...,x_n,0,...,0)$. Квадратичная длина этого вектора положительная. Но он преобразуется в вектор с неположительной квадратичной длиной. Пришли к противоречию, и Лемма доказана.

Введем на координатном многообразии пространства E_s^{n+s} параллельно с псевдоевклидовой метрикой евклидову метрику и отвечающее ей евклидово пространство E^{n+s}. Для отличия, векторы и точки пространства E^{n+s} будем обозначать строками $(\bar{x}_1,...,\bar{x}_n,x_{n+1},...,x_{n+s})$ и $(x_1,...,x_n,\bar{x}_{n+1},...,\bar{x}_{n+s})$. Это предлагается с той целью, чтобы движениям псевдоевклидова пространства E_s^{n+s} сопоставить как их своеобразную геометрическую реализацию евклидовы движения евклидова пространства E^{n+s}.

Теорема 2. *Пусть* $\varphi^{-1} : x \to x : (x_1,...,x_n,x_{n+1},...,x_{n+s}) \to (\bar{x}_1,...,\bar{x}_n,\bar{x}_{n+1},..., \bar{x}_{n+s})$ *- движение* (*вращение вокруг начала* o) *в пространстве* E_s^{n+s}, *заданное преобразованием* (*). *Тогда отображения* $(\bar{x}_1,...,\bar{x}_n,x_{n+1},...,x_{n+s}) \to (x_1,...,x_n,\bar{x}_{n+1},..., \bar{x}_{n+s})$ *и* $(x_1,...,x_n,\bar{x}_{n+1},...,\bar{x}_{n+s}) \to (\bar{x}_1,...,\bar{x}_n,x_{n+1},...,x_{n+s})$ *суть прямое и обратное евклидовы движения* (*вращения вокруг начала* o) *в пространстве* E^{n+s}. *Матрицы этих* *евклидовых движений вполне определяются надлежащми решениями системы уравнений* (*); *соответствующие псевдоевклидовым диагональным подматрицам диагональные подматрицы этих движений, верхняя левая и нижняя правая, - обратные к псевдоевклидовым подматрицам*.

Доказательство. Пусть $(\bar{x}_1,...,\bar{x}_n,x_{n+1},...,x_{n+s})$ - произвольно выбранная точка в E^{n+s}. Рассмотрим первые n строк преобразования (*) как систему линейных уравнений для координат $x_1,...,x_n$ с заданными координатами $\bar{x}_1,...,\bar{x}_n$ и $x_{n+1},...,x_{n+s}$. Так как по Лемме 2 определитель системы отличен от нуля, то система имеет, притом единственное, решение $x_1,...,x_n$. Подставляя значения $x_1,...,x_n,x_{n+1},...,x_{n+s}$ в правые части следующих s строк преобразования (*), находим координаты $\bar{x}_{n+1},...,\bar{x}_{n+s}$. Тем самым определяются движение $\varphi^{-1}: x \to x$ в E_s^{n+s} и первое отображение $(\bar{x}_1,...,\bar{x}_n,x_{n+1},...,x_{n+s}) \to (x_1,...,x_n,\bar{x}_{n+1},...,\bar{x}_{n+s})$ в E^{n+s}, указанное в теореме. Полученное отображение сохраняет начало o и сохраняет евклидову квадратичную длину векторов. Следовательно, по теореме 1 (обоснование дается позже), оно есть движение в E^{n+s} (вращение вокруг начала o). Эти же свойства устанавливаются и для второго указанного в теореме отображения в E^{n+s}. Утверждения теоремы о подматрицах и то, что оба движения в E^{n+s} взаимообратные - очевидны. Очевидно также, что псевдоевклидову движению $\varphi: x \to x$ сопоставляются те же самые евклидовы движения. Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть* $(\bar{x}_1,...,\bar{x}_n,x_{n+1},...,x_{n+s}) \to (x_1,...,x_n,\bar{x}_{n+1},...,\bar{x}_{n+s})$ *- движение* (*вращение вокруг начала* o) *в пространстве* E^{n+s}, *заданное линейным преобразованием. Пусть левая верхняя* n*-мерная (правая нижняя* s*-мерная) диагональная подматрица этого преобразования - невырожденная. Тогда правая нижняя* s*-мерная (левая верхняя* n*-мерная) диагональная подматрица преобразования в* E^{n+s} *- также невырожденная, и отображения* $(x_1,...,x_n,x_{n+1},...,x_{n+s}) \to (\bar{x}_1,...,\bar{x}_n,\bar{x}_{n+1},...,\bar{x}_{n+s})$ *и* $(\bar{x}_1,...,\bar{x}_n,\bar{x}_{n+1},...,\bar{x}_{n+s}) \to (x_1,...,x_n,x_{n+1},...,x_{n+s})$ *суть прямое и обратное псевдоевклидовы движения* (*вращения вокруг начала* o) *в* *пространстве* E_s^{n+s} .

Эта теорема - обратная к теореме 2, доказательство проводится по той же схеме.

Заключение

Теорема 1 известна, но ее общепринятые в литературе формулировки расширены. В [6, стр. 263] линейность отнесена к условиям теоремы, что обосновывается автором "наследственной" причиной - линейностью галилеева преобразования; линейность предполагалась, как подчеркивал Пуанкаре, самим Лоренцем [7]. В [8, стр. 111, 112, 536] дополнительно требуется взаимная однозначность преобразования пространства на себя, и в доказательстве теоремы применяется сложный признак линейности (аффинности) преобразования, когда прямые переходят в прямые. В хроногеометрии - школа Александрова - условие теоремы о сохранении квадратичного расстояния между точками заменяют требованиями биективного сохранения светового конуса, причем в доказательствах также применяется признак аффинности преобразования. Дело в том, что целью и предметом хроногеометрии, начатой работой [9], является изучение глубоких связей между причинно-следственной и пространственно-временной структурами событий в специальной теории относительности, предложенное Фоком как проблема Александрову. Трудности доказательства теоремы в таких непростых условиях обсуждались Рашевским [6, стр. 264, 265]. Наши формулировка и доказательство теоремы 1 - геометрически оптимальные: в них не предполагаются ни линейность, ни непрерывность, ни биективность рассматриваемого преобразования, причем вместе с леммой 1 результат распространяется на евклидовы пространства - при индексе инерции $s=0$ (обоснование применения теоремы 1 в доказательстве теоремы 2).

Как уже отмечалось, преобразованиями Погорелова вращению псевдоевклидова пространства естественно сопоставляются взаимообратные вращения евклидова пространства. Это стимулировало получение результата, сформулированного в теореме 2. Нами дается прямое доказательство теоремы, в котором не применяются преобразования Погорелова, в свое время подсказавшие автору эту неожиданную теорему. Повидимому, эта теорема распространяется также на псевдоэрмитовы и эрмитовы метрики. К обоснованию здесь можно назвать пример отображения движений для двумерных комплексных метрик в [10, стр. 103]. Переход к комплексным метрикам для геометрии "в целом" важен. Кон-Фоссен предполагал возможность объединения проблем однозначности погружения метрик и положительной, и отрицательной кривизны переходом к комплексным метрикам [11, стр. 74, 85].

Теорема 2 дополняет результаты Минковского, открывшего геометрические основания специальной теории относительности Эйнштейна. Эта теорема наглядно показывает и равноправие пространства и времени, и отражение этого равноправия в равноправии явлений замедления времени и сокращения длин в инерциальных системах. В математическом плане общей причиной этих явлений служит невырожденность диагональных подматриц, показанная в лемме 2; отметим, что невырожденность диагональных подматриц применяется в литературе для характеристики группы движений псевдоевклидова пространства как состоящей из четырех связных компонент [6, стр. 207]. Эти явления характерны еще и тем, что им фактически сопоставляются прямое и обратное движения в евклидовом пространстве. Теорема 2 дает также своеобразную геометрическую интерпретацию физического принципа относительности, он переформулируется через равенство квадратов векторов при движениях в многомерном евклидовом пространстве: "*здесь, но в то время*" равно "*там, но в это время*". Для общего, не обязательно лоренцева пространства время есть вектор, в физике такое пространство - четырехмерное, с индексом инерции 2 - рассматривал Гёдель [12, стр. 97]. Теоремы 2 и 3 полностью определяют соответствие между евклидовыми и псевдоевклидовыми движениями. Вероятно, эти результаты заинтересуют физиков.

Список литературы

1. Погорелов А.В.: О преобразовании изометричных поверхностей. ДАН СССР, Том 122, N 1, (1959)
2. Погорелов А.В.: Внешняя геометрия выпуклых поверхностей. "Наука", Москва, 760 с. (1969)
3. Погорелов А.В.: Некоторые вопросы теории поверхностей в эллиптическом пространстве. Издательство ХГУ, Харьков, 92 с. (1960)
4. Милка А.Д.: Однозначная определенность общих выпуклых поверхностей в пространстве Лобачевского. Укр. геометрич. сб., вып. 23 (1980), с. 99-107
5. Решетняк Ю.Г.: Об одном обобщении выпуклых поверхностей. Матем. сб., Т. 40, № 3 (1956), с. 386-398
6. Рашевский П.К.: Риманова геометрия и тензорный анализ. "Наука", Москва, 664 с. (1964)
7. Пуанкаре А.: О динамике электрона. Принцип относительности: Сб. работ классиков релятивизма. - Л., (1935) - С. 51-129
8. Розенфельд Б.А.: Многомерные пространства. "Наука", Москва, 648 с. (1966)
9. Александров А.Д. , Овчинникова В.В.: Замечания к основам теории относительности. Вестн. ЛГУ. Сер. математики, физики и химии.

Вып. 4. (1953), с.95-110

10. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т.: Современная геометрия. "Наука", Москва, 760 с. (1979)
11. Кон-Фоссен С.Э.: Некоторые вопросы геометрии в целом. "Физматгиз", Москва, 304 с. (1959)
12. Шредингер Э.: Пространственно-временная структура вселенной. "Наука", Москва, 224 с. (1986)

Abstract. A new geometry of pseudo-Euclidean motions is discussed. It is initiated by the well-known Pogorelov transformations for pairs of isometric surfaces in non-Euclidean spaces. An extension of the domain of applications of these transformations establishes direct and natural relations between pseudo-Euclidean motions and Euclidean ones, it explains a determining role of the Lorenz invariant of motion, a squared length of vectors, and completes results by Minkowski about geometric foundations of the special relativity theory of Einstein.

Mathematics Subject Classification 52C25, 53C45, 51M10, 83A05

Milka A.
GST Joint Stock Company (Kharkiv, Ukraine),
gst@nti.com.ua

Милка А.
ФТИНТ им. Б.И.Веркина НАН Украины (Харьков, Украина),
milka@ilt.kharkov.ua

Праці міжнародного геометричного центру — Proceedings of the International Geometry Center
2010. – 3 (1): 23-28

On the 2nd type curvature induced on plane distribution in projective space

Olga Omelyan

Abstract. In many-dimensional projective space plane distribution is considered. The group connection curvature of the 2nd type, induced by composite clothing of the plane distribution, is constructed. It is proved, that an immovability of pair planes, namely, Cartan's plane and Bortolotti's hyperplane in case of holonomic distribution implies the vanishing the curvature tensor of the 2nd type.

Key words: Projective space · Plane distribution · Group connection · Curvature tensor · Composite clothing

Mathematics Subject Classification: 58A30, 53C05

In paper indexes take on the following values:

$I,\ldots=\overline{1,n};\, i,\ldots=\overline{1,m};\, a,\ldots=\overline{m+1,n}.$

1. In n-dimensional projective space P_n we will consider distribution NS_n [1,2] of m-dimensional centered planes P_m^*. The distribution is defined by the equations $\omega_i^a=\Lambda_{iJ}^a\omega^J$. Components of fundamental object of the 1st order $\Lambda^I=\{\Lambda_{iJ}^a\}$ of NS_n satisfy the following differential comparisons modulo basic forms ω^I:

$$\Delta\Lambda_{iJ}^a-\delta_J^a\omega_i\equiv 0;\ \Delta\Lambda_{iJ}^a=d\Lambda_{iJ}^a-\Lambda_{jJ}^a\omega_i^j-\Lambda_{iK}^a\omega_J^K+\Lambda_{iJ}^b\omega_b^a,$$

where δ_J^a -- generalized Kronecker symbol.

Earlier the composite clothing of the distribution NS_n has been made [3,4]. It is consisted in assignment on it of two analoges of Cartan's plane and Norden's normal of the 2nd kind, namely,

$$C_{n-m-1} : P^*_m \oplus C_{n-m-1} = P_n, \qquad N_{m-1} : A \oplus N_{m-1} = P^*_m,$$

and the clothing planes are defined by aggregate of points

$$B_a = A_a + \lambda^i_a A_i + \lambda_a A, \qquad B_i = A_i + \lambda_i A.$$

The object $\lambda = \{\lambda^i_a, \lambda_a, \lambda_i\}$ is a clothing quasitensor, containing 3 subquasitensors λ^i_a, $\{\lambda^i_a, \lambda_a\}$ and λ_i. Expressions for differentials of the points B_a and B_i look like:

$$dB_a = (\ldots)^b_a B_b + t^i_{aJ}\omega^J B_i + (t_{aI} - \lambda_i t^i_{aI})\omega^I A,$$

$$dB_i = (\ldots)^j_i B_j + (\ldots)^a_{iI}\omega^I B_a + t_{iJ}\omega^J A,$$

where components of nonspecial displacements tensor $t = \{t^i_{aJ}, t_{aI}, t_{iJ}\}$ [3] are functions of the 1st order fundamental object Λ^I, clothing quasitensor λ and its pfafian derivatives $\lambda' = \{\lambda^i_{aJ}, \lambda_{aI}, \lambda_{iJ}\}$, i.e. $t = t(\Lambda^I, \lambda, \lambda')$. The tensor t contains a series of elementary, simple and composite subtensors. The vanishing the tensor t geometrically means the stationarity of pair planes (C_{n-m-1}, P_{n-1}), where Bortolotti's hyperplane represents plane strained on Cartan's plane C_{n-m-1} and normal of the 2nd kind N_{m-1}, namely $P_{n-1} = [B_a, B_i]$.

2. The principal fiber bundle [2] $G(U_n)$ is associated with the distribution. The base of $G(U_n)$ is area U_n ($U_n \subset P_n$) described by a center of plane P^*_m, and typical fiber --- a subgroup G of stationarity for the centered plane P^*_m. In this fiber bundle by Lumiste's way [4] group connection is given by means of form $\tilde{\omega} = \omega - \Gamma_K \omega^K$, and $\tilde{\omega} = \{\tilde{\omega}^i_j, \tilde{\omega}_i, \tilde{\omega}^a_b, \tilde{\omega}^i_a, \tilde{\omega}_a\}$. Components of connection object $\Gamma = \{\Gamma^i_{jk}, \Gamma^i_{ja}, \Gamma_{ij}, \Gamma_{ia}, \Gamma^a_{bi}, \Gamma^a_{bc}, \Gamma^i_{aj}, \Gamma^i_{ab}, \Gamma_{ai}, \Gamma_{ab}\}$ satisfy the differential equations [2], in particular,

$$\Delta\Gamma^i_{jk} + \omega^i_{jk} = \Gamma^i_{jkI}\omega^I, \Delta\Gamma^i_{ja} - \Gamma^i_{jk}\omega^k_a + \omega^i_{ja} = \Gamma^i_{jaI}\omega^I, \ldots (1)$$

The group connection object Γ contains a series of subobjects [2]. Components of curvature object $R=\{R^i_{jkl},R^i_{jka},R^i_{jab},\ldots\}$ of the group connection Γ are expressed [2] in terms of the components of Γ, their pfaffian derivatives and the components of Λ^l, for example,

$$R^i_{jkl}=\Gamma^i_{j[kl]}-\Gamma^i_{ja}\Lambda^a_{[kl]}-\Gamma^s_{j[k}\Gamma^i_{sl]},R^i_{jab}=\Gamma^i_{j[ab]}-\Gamma^k_{j[a}\Gamma^i_{kb]},(2)$$

$$R^i_{jka}=\frac{1}{2}(\Gamma^i_{jka}-\Gamma^i_{jak}-\Gamma^i_{jb}\Lambda^b_{ka})-\Gamma^l_{j[k}\Gamma^i_{la]},$$

and alternation is made in two last bottom indexes in square brackets, therefore $R^i_{j(kl)}=0$, $R^i_{j(ab)}=0$. The curvature object R of the connection Γ is a tensor and contains a series of subtensors, corresponding to subobjects of the connection object Γ.

3. In [3] it has been proved, that the distribution NS_n and its composite clothing induce in the fiber bundle $G(U_n)$ the group connection of the 2nd type $\overset{02}{\Gamma}=\{\overset{0}{\Gamma}{}^i_{jK},\overset{02}{\Gamma}_{iJ},\overset{0}{\Gamma}{}^a_{bI},\overset{02}{\Gamma}{}^i_{aJ},\overset{02}{\Gamma}_{aI}\}$ with components defined, in particular, under formulas

$$\overset{0}{\Gamma}{}^i_{jk}=\Lambda^a_{jk}\lambda^i_a-\delta^i_j\lambda_k-\delta^i_k\lambda_j,\overset{02}{\Gamma}_{ij}=\lambda_{ij}+\Lambda^a_{ij}\lambda^k_a\lambda_k-2\lambda_i\lambda_j,(3)$$

$$\overset{02}{\Gamma}_{ai}=\lambda_{ai}-\lambda_{ji}\lambda^j_a-\Lambda^b_{ji}\lambda^j_a(\lambda_b+\lambda^k_b\lambda_k)+2\lambda_i\lambda^j_a\lambda_j-\lambda_a\lambda_i.$$

Let's construct the 2-nd type curvature generated by the group connection of 2nd type, i.e. we will obtain scopes for the components of curvature tensor $\overset{02}{R}$ by object of the group connection $\overset{02}{\Gamma}$. From the expressions (2) defining the components of the curvature tensor R, it is visible, that thereto at first it is necessary to find scopes for pfaffian derivatives of the object Γ. Using the differential equations (1), expressions (3) and similar expressions for other components of the connection object $\overset{02}{\Gamma}$, we will find, that their pfaffian derivatives are expressed as follows:

$$\overset{02}{\Gamma}_{ijk}=(\Lambda^a_{ijk}+\Lambda^a_{ib}\Lambda^b_{jk})\lambda^l_a\lambda_l+\lambda_{ijk}+\Lambda^a_{ij}(\lambda^l_{ak}\lambda_l+\lambda^l_a\lambda_{lk})-2\lambda_{ik}\lambda_j-2\lambda_i\lambda_{jk},$$

$$\overset{02}{\Gamma}_{ija} = (\Lambda^b_{ija} + \Lambda^b_{ic}\Lambda^c_{ja})\lambda^k_b\lambda_k + \lambda_{ija} + \Lambda^b_{ij}(\lambda^k_{ba}\lambda_k + \lambda^k_b\lambda_{ka}) - 2\lambda_{ia}\lambda_j - 2\lambda_i\lambda_{ja}, (4)$$

$$\overset{02}{\Gamma}_{iab} = \Lambda^c_{iab}\lambda^c_j\lambda_j + \lambda_{iab} + \Lambda^c_{ia}(\lambda^j_{cb}\lambda_j + \lambda^j_c\lambda_{jb}) - \lambda_a\lambda_{ib} - \lambda_i\lambda_{ab} + 2(\lambda_j\lambda^j_a\lambda_{ib} + \lambda_i\lambda^j_a\lambda_{jb} + \lambda_i\lambda_j\lambda^j_{ab}), \ldots$$

Turning back to the formulas (2) defining the curvature tensor R, we see, that for the obtaining of expressions for components of tensor $\overset{02}{R}$ it is necessary: 1) to find alternations of corresponding pfaffian derivatives (4), using symmetry of components Λ^a_{iJK} of fundamental object of the 2nd order $\Lambda^2 = \{\Lambda^1, \Lambda^a_{iJK}\}$ and symmetry of pfaffian derivatives of the 2nd order $\lambda_{iJK}, \lambda^i_{aJK}, \lambda_{aIJ}$ for components of clothing quasitensor λ of the distribution NS_n in two last bottom indexes, 2) to calculate convolutions of corresponding components of the object Γ and Λ^1 and also to find alternated convolutions for corresponding components of the connection object Γ. Thus, the expressions for components of the curvature tensor $\overset{02}{R}$ have the following form:

$$\overset{02}{R}_{ijk} = \overset{0}{R}{}^l_{ijk}\lambda_l - \Lambda^a_{[jk]}\lambda_{ia}, \overset{02}{R}_{iab} = \overset{0}{R}{}^j_{iab}\lambda_j, \overset{02}{R}{}^i_{ajk} = \overset{0}{R}{}^b_{ajk}\lambda^i_b - \overset{0}{R}{}^i_{ljk}\lambda^l_a - \Lambda^b_{[jk]}\lambda^i_{ab},$$

$$\overset{02}{R}{}^i_{abc} = \overset{0}{R}{}^d_{abc}\lambda^i_d - \overset{0}{R}{}^i_{jbc}\lambda^j_a, \overset{02}{R}_{aij} = \overset{0}{R}{}^b_{aij}\lambda_b - \overset{0}{R}{}^l_{kij}\lambda^k_a\lambda_l - \Lambda^b_{[ij]}(\lambda_{ab} - \lambda_{kb}\lambda^k_a), (5)$$

$$\overset{02}{R}_{abc} = \overset{0}{R}{}^d_{abc}\lambda_d - \overset{0}{R}{}^j_{ibc}\lambda^i_a\lambda_j, \ldots$$

Expressions of scopes for the rest of components of the curvature tensor are defined under the formulas similar (5), but they have more awkward form. So, we have constructed the 2nd type curvature $\overset{02}{R}$ induced by the composite clothing of the distribution NS_n.

Remark 1 From formulas (5) it is visible, that into expressions for the components of the 2nd type curvature tensor $\overset{02}{R}$ components of curvature tensors of induced linear connections, which scopes have been found in paper [5], enter.

Theorem 1 In case of holonomic distribution $(\Lambda^a_{[ij]}=0)$ at vanishing the curvature tensors of induced plane $\overset{0}{R}{}^i_{jKL}$ and normal $\overset{0}{R}{}^a_{bIJ}$ linear connections the curvature tensor of the 2nd type $\overset{02}{R}$ vanishes.

Remark 2 The scopes for components of curvature tensors for induced linear connections represent the functions of components of nonspecial displacements tensor t, clothing quasitensor λ and fundamental object Λ^l of the distribution NS_n.

Thus, the theorem 1 is equivalent to the following statement

Theorem 2 Immovability of pair planes, namely, Cartan′s plane and Bortolotti′s hyperplane $(t=0)$ in case of holonomic distribution implies the vanishing the 2nd type curvature tensor.

Remark 3 In paper [6] the generalized Ricci identities for components of the curvature tensor $\{\overset{0}{R}{}^i_{jkl}, \overset{02}{R}_{ijk}\}$ of the centerprojective subconnection $\{\overset{0}{\Gamma}{}^i_{jk}, \overset{02}{\Gamma}_{ij}\}$ are introduced and it is shown, that they are fullfilled in case of holonomic distribution.

References

1. Лаптев Г.Ф., Остиану Н.М.: Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности. I. Тр. геом. семинара, ВИНИТИ. М., Т. 3. С. 49 -- 94 (1971)
2. Омельян О.М.: Нетензорность объекта кривизны групповой связности на распределении плоскостей. Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 33. С. 74 - 78 (2002)
3. Омельян О.М.: Четыре индуцированных связности на распределении плоскостей. Межд. конф. по геом. и анализу. Пенза. С. 63 - 69 (2003)
4. Омельян О.М.: Пучки связностей 1-го и 2-го типов,

индуцированные композиционным оснащением распределения плоскостей. Движения в обобщенных пространствах. Пенза. С. 94 - 101 (2005)

5. Омельян О.М.: О кривизне 1-го типа, индуцированной на распределении плоскостей в проективном пространстве. Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 39. С. 110 - 116 (2008)
6. Омельян О.М.: О тождествах Риччи для центропроективной кривизны 2-го типа на распределении. Тез. докл. межд. конф. "Геометрия в Одессе - 2009". Одесса. С. 63 (2009)

Olga Omelyan

I.Kant Russian State University, Russia.

e-mail: olga–omelyan2002@mail.ru

Ольга Омельян

О кривизне 2-го типа, индуцированной на распределении плоскостей в проективном пространстве

В многомерном проективном пространстве рассмотрено распределение плоскостей. Построена кривизна 2-го типа групповой связности 2-го типа, индуцированной композиционным оснащением распределения плоскостей. Доказано, что неподвижность пары плоскостей Картана и гиперплоскости Бортолотти в случае голономного распределения влечет обращение в нуль тензора кривизны 2-го типа.

УДК: 514.75

Праці міжнародного геометричного центру | Proceedings of the International Geometry Center
2010. – 3 (1): 29-37

Laptev's and Lumiste's ways of the giving a connection in the principal fiber bundle

Yu. I. Shevchenko

Abstract. Two ways of the giving the group connection in the principal fiber bundle are considered, which are named as G.F. Laptev's and Yu.G. Lumiste's ways. It is shown, these ways are equivalent.

Let $G_r(M_n)$ – a principal fiber bundle, which base is n-dimensional smooth manifold M_n, and typical fiber – Lie's group G_r. The structural equations of Laptev [1, 2] of the the principal fiber bundles $G_r(M_n)$ look like:

$$D\omega^i = \omega^j \wedge \omega^i_j \qquad (i,\ldots=\overline{1,n}; \quad \alpha,\ldots=\overline{n+1,n+r}),(1)$$

$$D\omega^\alpha = C^\alpha_{\beta\gamma}\omega^\beta \wedge \omega^\gamma + \omega^i \wedge \omega^\alpha_i,(2)$$

where $C^\alpha_{\beta\gamma}$ – structural constants of Lie group G_r, satisfying the condition of antisymmetry $C^\alpha_{(\beta\gamma)}=0$ and Jacobi's identities

$$C^\alpha_{\{\beta|\gamma|}C^\gamma_{\delta\varepsilon\}} = 0.(3)$$

The round brackets designate symmetry, and curly brackets – cycling.

Let's set in the principal fiber bundle $G_r(M_n)$ the group connection by means of transformed fiber forms

$$\tilde{\omega}^\alpha = \omega^\alpha - \Gamma^\alpha_i\omega^i,(4)$$

where Γ^{α}_{i} – some functions. We differentiate the forms *(4)* with the help of the structural equations *(1,2)* and take out the basic forms ω^i

$$D\tilde{\omega}^{\alpha}=C^{\alpha}_{\beta\gamma}\omega^{\beta}\wedge\omega^{\gamma}+\omega^{i}\wedge(d\Gamma^{\alpha}_{i}-\Gamma^{\alpha}_{j}\omega^{j}_{i}+\omega^{\alpha}_{i}).(5)$$

Let's substitute expressions of the fiber forms ω^{α} from the equalities *(4)* into the 1-st summand

$$C^{\alpha}_{\beta\gamma}\omega^{\beta}\wedge\omega^{\gamma}=C^{\alpha}_{\beta\gamma}(\tilde{\omega}^{\beta}\wedge\tilde{\omega}^{\gamma}+\Gamma^{\beta}_{i}\omega^{i}\wedge\tilde{\omega}^{\gamma}+\tilde{\omega}^{\beta}\wedge\Gamma^{\gamma}_{j}\omega^{j}+\Gamma^{\beta}_{i}\omega^{i}\wedge\Gamma^{\gamma}_{j}\omega^{j}).$$

In the 2-nd and 3-rd summands we shall return to initial fiber forms

$$C^{\alpha}_{\beta\gamma}\omega^{\beta}\wedge\omega^{\gamma}=C^{\alpha}_{\beta\gamma}(\tilde{\omega}^{\beta}\wedge\tilde{\omega}^{\gamma}+\Gamma^{\beta}_{i}\omega^{i}\wedge\omega^{\gamma}+\omega^{\beta}\wedge\Gamma^{\gamma}_{j}\omega^{j}-\Gamma^{\beta}_{i}\omega^{i}\wedge\Gamma^{\gamma}_{j}\omega^{j}).$$

Let's open brackets, substitute into the equations (5) and rearrange summands

$$D\tilde{\omega}^{\alpha}=C^{\alpha}_{\beta\gamma}\tilde{\omega}^{\beta}\wedge\tilde{\omega}^{\gamma}-C^{\alpha}_{\beta\gamma}\Gamma^{\beta}_{i}\Gamma^{\gamma}_{j}\omega^{i}\wedge\omega^{j}+$$

$$+\omega^{i}\wedge(d\Gamma^{\alpha}_{i}-\Gamma^{\alpha}_{j}\omega^{j}_{i}+\omega^{\alpha}_{i}+\Gamma^{\beta}_{i}C^{\alpha}_{\beta\gamma}\omega^{\gamma}-\Gamma^{\gamma}_{i}C^{\alpha}_{\beta\gamma}\omega^{\beta}).(6)$$

Entering tensor differential operator Δ

$$\Delta\Gamma^{\alpha}_{i}=d\Gamma^{\alpha}_{i}-\Gamma^{\alpha}_{j}\omega^{j}_{i}+\Gamma^{\beta}_{i}\omega^{\alpha}_{\beta},(7)$$

$$\omega^{\alpha}_{\beta}=2C^{\alpha}_{\beta\gamma}\omega^{\gamma},(8)$$

write down the structural equations (6) more shortly

$$D\tilde{\omega}^{\alpha}=C^{\alpha}_{\beta\gamma}\tilde{\omega}^{\beta}\wedge\tilde{\omega}^{\gamma}+\omega^{i}\wedge(\Delta\Gamma^{\alpha}_{i}+\omega^{\alpha}_{i})-C^{\alpha}_{\beta\gamma}\Gamma^{\beta}_{i}\Gamma^{\gamma}_{j}\omega^{i}\wedge\omega^{j}.(9)$$

According to the theorem of Cartan–Laptev [3, 4] the forms (4) set the group connection, if on the base M_n the field of connection object is given [4, p. 63, 83; 5]

$$\Delta\Gamma^{\alpha}_{i}+\omega^{\alpha}_{i}=\Gamma^{\alpha}_{ij}\omega^{j}.(10)$$

Substituting these differential equations into the structural equations (9), we have

$$D\tilde{\omega}^{\alpha}=C^{\alpha}_{\beta\gamma}\tilde{\omega}^{\beta}\wedge\tilde{\omega}^{\gamma}+R^{\alpha}_{ij}\omega^{i}\wedge\omega^{j},$$

and the components of the curvature object R^{α}_{ij} of the group connection are expressed as follows [4, p. 93; 5]:

$$R^{\alpha}_{ij} = \Gamma^{\alpha}_{[ij]} - C^{\alpha}_{\beta\gamma}\Gamma^{\beta}_{i}\Gamma^{\gamma}_{j}, (11)$$

where the square brackets designate alternation.

For the finding of the differential equations on the components of the curvature object R^{α}_{ij} it is necessary to continue the equations (10), which in view of the designations (7) include the forms ω^{i}_{j}, ω^{α}_{β}, ω^{α}_{i}.

We differentiate the structural equations (1) and take out the basic forms

$$(D\omega^{i}_{j} - \omega^{k}_{j} \wedge \omega^{i}_{k}) \wedge \omega^{j} = 0.$$

Let's solve the third-order equation on Laptev's lemma [1, 6]

$$D\omega^{i}_{j} = \omega^{k}_{j} \wedge \omega^{i}_{k} + \omega^{k} \wedge \omega^{i}_{jk}, (12)$$

and the new forms ω^{i}_{jk} satisfy the conditions $\omega^{i}_{jk} \wedge \omega^{j} \wedge \omega^{k} = 0$. For their performance of enough symmetry of the three-index forms on the bottom indexes

$$\omega^{i}_{[jk]} = 0. (13)$$

We differentiate the forms (8) with the help of the structural equations (2)

$$D\omega^{\alpha}_{\beta} = 2C^{\alpha}_{\beta\gamma}C^{\gamma}_{\delta\varepsilon}\omega^{\delta} \wedge \omega^{\varepsilon} + \omega^{i} \wedge \omega^{\alpha}_{\beta i}, (14)$$

$$\omega^{\alpha}_{\beta i} = 2C^{\alpha}_{\beta\gamma}\omega^{\gamma}_{i}. (15)$$

Let's write down Jacobi`s identities (3) in the developed kind and multiply by 3

$$C^{\alpha}_{\beta\gamma}C^{\gamma}_{\delta\varepsilon} + C^{\alpha}_{\delta\gamma}C^{\gamma}_{\varepsilon\beta} + C^{\alpha}_{\varepsilon\gamma}C^{\gamma}_{\beta\delta} = 0. (3')$$

With their help we shall transform (cf. [2, p. 169]) the 1-st set of the summands from the equations (14)

$$2C^{\alpha}_{\beta\gamma}C^{\gamma}_{\delta\varepsilon}\omega^{\delta} \wedge \omega^{\varepsilon} = 2(-C^{\alpha}_{\delta\gamma}C^{\gamma}_{\varepsilon\beta} - C^{\alpha}_{\varepsilon\gamma}C^{\gamma}_{\beta\delta})\omega^{\delta} \wedge \omega^{\varepsilon} =$$

$$= 2(-C^{\alpha}_{\delta\gamma}\omega^{\delta} \wedge C^{\gamma}_{\varepsilon\beta}\omega^{\varepsilon} + C^{\alpha}_{\varepsilon\gamma}\omega^{\varepsilon} \wedge C^{\gamma}_{\beta\delta}\omega^{\delta}) = 2(-C^{\alpha}_{\gamma\delta}\omega^{\delta} \wedge C^{\gamma}_{\beta\varepsilon}\omega^{\varepsilon} - C^{\alpha}_{\gamma\varepsilon}\omega^{\varepsilon} \wedge C^{\gamma}_{\beta\delta}\omega^{\delta}) =$$

$$= 2(-\frac{1}{2}\omega^{\alpha}_{\gamma} \wedge \frac{1}{2}\omega^{\gamma}_{\beta} - \frac{1}{2}\omega^{\alpha}_{\gamma} \wedge \frac{1}{2}\omega^{\gamma}_{\beta}) = \omega^{\gamma}_{\beta} \wedge \omega^{\alpha}_{\gamma}.$$

Here we have taken advantage anticommutative of external multiplication and antisymmetry of the constants $C^{\alpha}_{\beta\gamma}$, and also the designation (8). In view of these transformations the structural equations (14) accept a kind [2]:

$$D\omega^{\alpha}_{\beta} = \omega^{\gamma}_{\beta} \wedge \omega^{\alpha}_{\gamma} + \omega^{i} \wedge \omega^{\alpha}_{\beta i}. (16)$$

Lemma 1 $a_{\alpha\beta\gamma}\omega^{\alpha} \wedge \omega^{\beta} \wedge \omega^{\gamma} = a_{\{\alpha\beta\gamma\}}\omega^{\alpha} \wedge \omega^{\beta} \wedge \omega^{\gamma}$.

Really,

$$a_{\{\alpha\beta\gamma\}}\omega^{\alpha} \wedge \omega^{\beta} \wedge \omega^{\gamma} = \frac{1}{3}(a_{\alpha\beta\gamma} + a_{\beta\gamma\alpha} + a_{\gamma\alpha\beta})\omega^{\alpha} \wedge \omega^{\beta} \wedge \omega^{\gamma} =$$

$$= \frac{1}{3}(a_{\alpha\beta\gamma}\omega^{\alpha} \wedge \omega^{\beta} \wedge \omega^{\gamma} + a_{\beta\gamma\alpha}\omega^{\alpha} \wedge \omega^{\beta} \wedge \omega^{\gamma} + a_{\gamma\alpha\beta}\omega^{\alpha} \wedge \omega^{\beta} \wedge \omega^{\gamma}) =$$

$$= \frac{1}{3}(a_{\alpha\beta\gamma}\omega^{\alpha} \wedge \omega^{\beta} \wedge \omega^{\gamma} + a_{\alpha\beta\gamma}\omega^{\gamma} \wedge \omega^{\alpha} \wedge \omega^{\beta} + a_{\alpha\beta\gamma}\omega^{\beta} \wedge \omega^{\gamma} \wedge \omega^{\alpha}) =$$

$$= \frac{1}{3}3a_{\alpha\beta\gamma}\omega^{\alpha} \wedge \omega^{\beta} \wedge \omega^{\gamma} = a_{\alpha\beta\gamma}\omega^{\alpha} \wedge \omega^{\beta} \wedge \omega^{\gamma}.$$

Differentiate the structural equations (2) by means of the equations (1) and take out the basic forms

$$\omega^{i} \wedge (\omega^{j}_{i} \wedge \omega^{\alpha}_{j} - D\omega^{\alpha}_{i} + C^{\alpha}_{\beta\gamma}\omega^{\beta}_{i} \wedge \omega^{\gamma} + C^{\alpha}_{\beta\gamma}\omega^{\beta} \wedge \omega^{\gamma}_{i}) +$$

$$+ C^{\alpha}_{\beta\gamma}C^{\beta}_{\delta\varepsilon}\omega^{\delta} \wedge \omega^{\varepsilon} \wedge \omega^{\gamma} - C^{\alpha}_{\beta\gamma}C^{\gamma}_{\delta\varepsilon}\omega^{\beta} \wedge \omega^{\delta} \wedge \omega^{\varepsilon} = 0. (17)$$

Transform last two summands

$$C^{\alpha}_{\beta\gamma}C^{\beta}_{\delta\varepsilon}\omega^{\delta} \wedge \omega^{\varepsilon} \wedge \omega^{\gamma} - C^{\alpha}_{\beta\gamma}C^{\gamma}_{\delta\varepsilon}\omega^{\beta} \wedge \omega^{\delta} \wedge \omega^{\varepsilon} = 2C^{\alpha}_{\beta\gamma}C^{\beta}_{\delta\varepsilon}\omega^{\gamma} \wedge \omega^{\delta} \wedge \omega^{\varepsilon} =$$

$$= 2C^{\alpha}_{\beta\{\gamma}C^{\beta}_{\delta\varepsilon\}}\omega^{\gamma} \wedge \omega^{\delta} \wedge \omega^{\varepsilon} = 0$$

in view of the lemma 1 and Jacobi's identities. Therefore the third-order equation (17) will be transformed to a kind:

$$(D\omega_i^\alpha - \omega_i^j \wedge \omega_j^\alpha - \omega_i^\beta \wedge C_{\beta\gamma}^\alpha \omega^\gamma - C_{\gamma\beta}^\alpha \omega^\gamma \wedge \omega_i^\beta) \wedge \omega^i = 0.$$

Solving these equations on Laptev's lemma and using the designation (8), we have [1, 2]

$$D\omega_i^\alpha = \omega_i^j \wedge \omega_j^\alpha + \omega_i^\beta \wedge \omega_\beta^\alpha + \omega^j \wedge \omega_{ij}^\alpha, (18)$$

and $\omega_{ij}^\alpha \wedge \omega^i \wedge \omega^j = 0$. Symmetry

$$\omega_{[ij]}^\alpha = 0. (19)$$

sufficies for performance of these conditions.

Now differentiate the differential equations (10) with the help of the structural equations (1, 12, 16, 18)

$$d\Gamma_{ij}^\alpha \wedge \omega^j + \Gamma_{ij}^\alpha \omega^k \wedge \omega_k^j + \Gamma_{jk}^\alpha \omega^k \wedge \omega_i^j + \Gamma_j^\alpha \omega^k \wedge \omega_{ik}^j - \Gamma_{ij}^\beta \omega^j \wedge \omega_\beta^\alpha - \Gamma_i^\beta \omega^j \wedge \omega_{\beta j}^\alpha - \omega^j \wedge \omega_{ij}^\alpha = 0.$$

Take out the forms ω^j and take advantage the operator Δ

$$(\Delta\Gamma_{ij}^\alpha - \Gamma_k^\alpha \omega_{ij}^k + \Gamma_i^\beta \omega_{\beta j}^\alpha + \omega_{ij}^\alpha) \wedge \omega^j = 0.$$

Solve the square-law equations on Cartan's lemma and write down result as comparisons modulo basic forms

$$\Delta\Gamma_{ij}^\alpha - \Gamma_k^\alpha \omega_{ij}^k + \Gamma_i^\beta \omega_{\beta j}^\alpha + \omega_{ij}^\alpha \equiv 0. (20)$$

Lemma 2 $\Delta C_{\beta\gamma}^\alpha = 0.$

Proof. Let's write down the action of the operator Δ

$$\Delta C_{\beta\gamma}^\alpha = dC_{\beta\gamma}^\alpha - C_{\beta\delta}^\alpha \omega_\gamma^\delta - C_{\delta\gamma}^\alpha \omega_\beta^\delta + C_{\beta\gamma}^\delta \omega_\delta^\alpha.$$

Let's take advantage of the designation (8) and take out common multipliers

$$\Delta C_{\beta\gamma}^\alpha = dC_{\beta\gamma}^\alpha - 2(C_{\beta\delta}^\alpha C_{\gamma\varepsilon}^\delta + C_{\delta\gamma}^\alpha C_{\beta\varepsilon}^\delta - C_{\beta\gamma}^\delta C_{\delta\varepsilon}^\alpha)\omega^\varepsilon.$$

By virtue of $C_{\beta\gamma}^\alpha$ are constant and antisymmetric we have

$$\Delta C_{\beta\gamma}^\alpha = -2(C_{\beta\delta}^\alpha C_{\gamma\varepsilon}^\delta + C_{\gamma\delta}^\alpha C_{\varepsilon\beta}^\delta + C_{\varepsilon\delta}^\alpha C_{\beta\gamma}^\delta)\omega^\varepsilon.$$

At last, using Jacobi's identities $(3')$, we obtain proved equalities.

With the help of the equations (10) and lemma 2 we shall find differential comparisons on the components included in the formula (11) units $C^{\alpha}_{\beta\gamma}\Gamma^{\beta}_{i}\Gamma^{\gamma}_{j}$

$$\Delta(C^{\alpha}_{\beta\gamma}\Gamma^{\beta}_{i}\Gamma^{\gamma}_{j})+C^{\alpha}_{\beta\gamma}\omega^{\beta}_{i}\Gamma^{\gamma}_{j}+C^{\alpha}_{\beta\gamma}\Gamma^{\beta}_{i}\omega^{\gamma}_{j}\equiv 0.$$

Let's take advantage of the designation (15)

$$\Delta(C^{\alpha}_{\beta\gamma}\Gamma^{\beta}_{i}\Gamma^{\gamma}_{j})-\frac{1}{2}\Gamma^{\gamma}_{j}\omega^{\alpha}_{\gamma i}+\frac{1}{2}\Gamma^{\beta}_{i}\omega^{\alpha}_{\beta j}\equiv 0.$$

We use the comparisons (20)

$$\Delta(\Gamma^{\alpha}_{ij}-C^{\alpha}_{\beta\gamma}\Gamma^{\beta}_{i}\Gamma^{\gamma}_{j})-\Gamma^{\alpha}_{k}\omega^{k}_{ij}+\omega^{\alpha}_{ij}+\frac{1}{2}\Gamma^{\beta}_{i}\omega^{\alpha}_{\beta j}+\frac{1}{2}\Gamma^{\beta}_{j}\omega^{\alpha}_{\beta i}\equiv 0.$$

According to the formula (11) we alternate these comparisons on the indexes i, j

$$\Delta R^{\alpha}_{ij}-\Gamma^{\alpha}_{k}\omega^{k}_{[ij]}+\omega^{\alpha}_{[ij]}\equiv 0.(21)$$

In the symmetric case (13, 19) we have [4, p. 93]:

$$\Delta R^{\alpha}_{ij}\equiv 0.$$

The structural equations (9) can be written down in the other kind:

$$D\hat{\omega}^{\alpha}=C^{\alpha}_{\beta\gamma}\hat{\omega}^{\beta}\wedge\hat{\omega}^{\gamma}+\omega^{i}\wedge(\Delta\Im^{\alpha}_{i}+\omega^{\alpha}_{i}-C^{\alpha}_{\beta\gamma}\Im^{\beta}_{i}\Im^{\gamma}_{j}\omega^{j}),(22)$$

where we use the forms $\hat{\omega}^{\alpha}=\omega^{\alpha}-\Im^{\alpha}_{i}\omega^{i}$ instead of the forms (4). Then according to the theorem of Cartan–Laptev we shall obtain a little bit other differential equations of the connection object [1, 7]

$$\Delta\Im^{\alpha}_{i}+\omega^{\alpha}_{i}-C^{\alpha}_{\beta\gamma}\Im^{\beta}_{i}\Im^{\gamma}_{j}\omega^{j}=\Im^{\alpha}_{ij}\omega^{j}.(23)$$

Remark 3 *If $\Im^{\alpha}_{i}=\Gamma^{\alpha}_{i}$, then carring last summand from the left part of the equations (23) into the right part, for coincidence to the equations (10) we have to count*

$$\Gamma^{\alpha}_{ij}=\Im^{\alpha}_{ij}+C^{\alpha}_{\beta\gamma}\Gamma^{\beta}_{i}\Gamma^{\gamma}_{j}.(24)$$

Substituting the differential equations (23) into the structural equations (22), we have

$$D\hat{\omega}^{\alpha} = C^{\alpha}_{\beta\gamma}\hat{\omega}^{\beta} \wedge \hat{\omega}^{\gamma} + \Re^{\alpha}_{ij}\omega^{i} \wedge \omega^{j},$$

$$\Re^{\alpha}_{ij} = \Im^{\alpha}_{[ij]}. (25)$$

Definition 4 *Let's name the object* Γ^{α}_{i} $[\Im^{\alpha}_{i}]$*, which components satisfy the differential equations (10) [(23)], by the object of the group connection, set by way of Lumiste [Laptev], and the object* R^{α}_{ij} $[\Re^{\alpha}_{ij}]$*, which components are under the formulas (11) [(25)], by object of Lumiste's [Laptev's] curvature of the group connection.*

We differentiate the equations (23), result similar summands, take out the basic forms ω^{j} and use the operator Δ

$$[\Delta\Im^{\alpha}_{ij} + C^{\alpha}_{\beta\gamma}\Im^{\gamma}_{j}(\Im^{\beta}_{ik} + C^{\beta}_{\delta\varepsilon}\Im^{\delta}_{i}\Im^{\varepsilon}_{k})\omega^{k} - C^{\alpha}_{\beta\gamma}\Im^{\gamma}_{j}\omega^{\beta}_{i} + C^{\alpha}_{\beta\gamma}\Im^{\beta}_{i}(\Im^{\gamma}_{jk} + C^{\gamma}_{\delta\varepsilon}\Im^{\delta}_{j}\Im^{\varepsilon}_{k})\omega^{k} -$$

$$- C^{\alpha}_{\beta\gamma}\Im^{\beta}_{i}\omega^{\gamma}_{j} - \Im^{\alpha}_{k}\omega^{k}_{ij} + \Im^{\beta}_{i}\omega^{\alpha}_{\beta j} + \omega^{\alpha}_{ij}] \wedge \omega^{j} = 0.$$

Let's solve on Cartan's lemma and write down result as comparisons

$$\Delta\Im^{\alpha}_{ij} - C^{\alpha}_{\beta\gamma}\Im^{\gamma}_{j}\omega^{\beta}_{i} - C^{\alpha}_{\beta\gamma}\Im^{\beta}_{i}\omega^{\gamma}_{j} - \Im^{\alpha}_{k}\omega^{k}_{ij} + \Im^{\beta}_{i}\omega^{\alpha}_{\beta j} + \omega^{\alpha}_{ij} \equiv 0.$$

Let's take advantage of the designation (15) and result similar summands

$$\Delta\Im^{\alpha}_{ij} + \Im^{\beta}_{(i}\omega^{\alpha}_{|\beta|j)} - \Im^{\alpha}_{k}\omega^{k}_{ij} + \omega^{\alpha}_{ij} \equiv 0. (26)$$

Remark 5 *The comparisons (26) turn out faster from the comparisons (20) by means of the remark 1 and lemma 2.*

According to the formula (25) we alternate the comparison (26)

$$\Delta\Re^{\alpha}_{ij} - \Im^{\alpha}_{k}\omega^{k}_{[ij]} + \omega^{\alpha}_{[ij]} \equiv 0.$$

These comparisons to within designations coincide with the comparisons (21), that is explained by the remark 1. Really, transferring in the formula (24) composed $C^{\alpha}_{\beta\gamma}\Gamma^{\beta}_{i}\Gamma^{\gamma}_{j}$ into the left part and alternating, we have $R^{\alpha}_{ij} = \Re^{\alpha}_{ij}$. Thus, it is fair

Theorem 6 *Laptev's and Lumiste's ways of the giving the group connection in the principal fiber bundle are equivalent [8, 9].*

Conclusion 7 *In the principal fiber bundles one can apply two ways of the giving of the connection with the help of Laptev's [1, 3, 6, 7] and Lumiste's [4, p. 63, 83; 5; 10] connection objects, which result to identical group connections;*

Conclusion 8 *The comparison of two ways of the giving the group connection in the principal fiber bundles allows to prefer technically the way of Lumiste.*

References

1. Лаптев Г.Ф.: Многообразия, погруженные в обобщенные пространства. Тр. 4–го Всес. мат. съезда. Л., Т. 2. С. 226 – 233 (1964)
2. Лаптев Г.Ф.: Структурные уравнения главного расслоенного многообразия. Тр. геом. семинара, ВИНИТИ. М., Т. 2. С. 161 –178 (1969)
3. Остиану Н.М., Рыжков В.В., Швейкин П.И.: Очерк научных исследований Германа Федоровича Лаптева. Там же, Т. 4. С. 7 – 70 (1973)
4. Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П.: Дифференциально–геометрические структуры на многообразиях. Проблемы геометрии, ВИНИТИ. М., Т. 9. С. 5 – 248 (1979)

5. Лумисте Ю.Г.: Связности в однородных расслоениях. Матем. сб. Т. 69. С. 434 – 469 (1966)
6. Лаптев Г.Ф.: Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии. Тр. геом. семинара, ВИНИТИ. М., Т. 1. С. 139 – 189 (1966)
7. Лумисте Ю.Г.: Теория связностей в расслоенных пространствах. Алгебра, топология, геометрия - 1969, ВИНИТИ. М., С. 123 – 168 (1971)
8. Шевченко Ю.И.: Два приема задания связности в главном расслоении. Тез. докл. межд. конф. "Геометрия в Одессе – 2006". Одесса, 163 – 164 (2006)
9. Шевченко Ю.И.: Приемы Лаптева и Лумисте задания связности в главном расслоении. Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, (37) 179 – 187 (2006)
10. Шевченко Ю.И.: Оснащения голономных и неголономных гладких многообразий. Калининград, 82 с.

Yu. I. Shevchenko

I. Kant State University of Russia (Kaliningrad)

E-mail address : geometry@albertina.ru

Праці міжнародного геометричного центру *Proceedings of the International Geometry Center*
2010. – 3 (1): 39-63

О подмодулях свободных конечномерных модулей

Марек Юкл, Ленка Юклова, Йозеф Микеш

Аннотация. Статья посвящена изучению структуры подмодулей свободных конечномерных модулей над локальными кольцами A специального типа – так называемых A-пространств.

Ключевые слова: локальное кольцо, свободный модуль, A-пространство, кольцо эндоморфизмов.

Введение

Настоящая статья посвящена изложению некоторых вопросов теории подмодулей свободных конечномерных модулей над локальными кольцами специальных типов. Теория свободных конечномерных A-модулей над локальными кольцами, так называемых A-пространств в смысле Б.Р. Макдональда (B.R. McDonald), давно рассматривалась в многочисленных монографиях, напр. [1], [31], [32].

Мотивацией изучения этих модулей является естественность геометрических приложений, которая вытекает из близости локальных колец и тел. Таким образом, можно естественным образом ввести в рассмотрение проективную геометрию над выше указанными кольцами (смотри напр. [5], [23]

, [7]). Близость локальных колец и тел следует из того, что эти структуры имеют единственный максимальный идеал. Предлагаемая работа, для нашего мнения, выполняет существенную часть, которая находится между общими локальными кольцами и телами, т.е. локальные коммутативные алгебры A порожденные над произвольным телом одним нильпотентным элементом, так называемые *плюральные алгебры*, см. Р. Бургетова, Д. Клуцки [9]. Таким образом, можно перенести ряд свойств конечномерных линейных пространств над телами на свободные конечно генерированные A-модули. Приведенная алгебра − обобщение известных дуальных чисел, введенных уже в 19 веке Клиффордом [10], в нашем случае порядок алгебры может быть любым натуральным числом. Рассматриваемые алгебры, которые одновременно являются алгебрами Вейля (Weil), имеют приложение также, например, в математической статистике, механике твердого тела, роботике, дифференциальной геометрии, см. [11], [34], [34], [37].

Согласно [31] вводим в рассмотрение A-подпространство как директно дополнительный A-подмодуль. Изветсно, что любая директная компонента A-пространств а является свободным подмодулем. В нашей работе показывается, что верно и обратное. Так как этот вопрос был долгое время открытым возникли различные определения понятия A-подпространств, см. [7].

В A-пространствах можно выделить подмодули двух типов − те, которые одновременно A-подпространства, и остальные. Тогда существенен вопрос о том, как найти эффективный критерий когда подмодуль является свободным. Нами найдены два критерия, первое излагается в теореме 23, а второе, которое основывается на обобщении известной треугольной теории Галуа, в теоремах 32 и 38. Заметим, что теорема Галуа тесно связана с основной теоремой проективной геометрии, эта проблематика актуальна по сей день, см. [30], [12], [35].

Свойств подмодулей касается также нахождение необходимых и достаточных условий для трансверсальности A-подпространств (в смысле Фельдкампа (Veldkamp) теорема 16).

В теоремах 32 и 38 найдены изоморфизмы, соответственно, антиизоморфизмы, упорядоченного множества подмодулей A-пространства и упорядоченного множества левых и правых анигиляторов кольца эндоморфизмов A-пространства, дополненные о эти корреспонденции между множеством A-подпространств и левых и правых идеалов кольца эндоморфизмов генерированных идемпотентным элементом. Показано, что структура подмодулей и подпространств A-пространства вполне определена структурой анигиляторов кольца эндоморфизмов данного A-пространства.

1 A-пространства и их гомоморфизмы

Понятие *модуль над кольцом A*, или *A-модуль* будем в настоящей работе применять в обычном смысле, равно как понятия *линейная (не)зависимость* элементов в A-модуле, *совокупность генераторов, базы* и *гомоморфизмы* A-модулей. Напомним, что A-модуль в общем случае может не иметь совокупность генераторов, если же он все-таки имеет минимальные совокупности генераторов, то они могут иметь разную мощность. В случае если он содержит A-модуль базис, называем его *свободным A-модулем* (см. напр. [1], [3], [27], [31]).

Напомним, что под *локальным кольцом* подразумеваем каждое унитарное коммутативное кольцо A, в котором выполняются следующие взаимно равносильные условия:

- $A/Rad(A)$ − поле,
- A имеет единственный максимальный идеал,
- все не инветируемые элементы A образуют собственный идеал,
- для любого $r \in A$ либо r, либо $1-r$ − инветируемый элемент.

Понятие *A-пространства* введем в рассмотрение по Б.Р. Макдональду (B.R. McDonald) (см. [31]):

Определение 1 *Пусть A − локальное кольцо. Конечномерным A-пространством называется конечно генерированный A-модуль, если существуют* $e_1,\ldots, e_n \in M$ *такие, что*

- $M = A\,e_1 \oplus \ldots \oplus A\,e_n$,
- отображения $A \to A\,e_i$ определенная условием $1 \mapsto \boldsymbol{e}_i$ являются изоморфизмами модулей для всех $i, i = 1,\ldots,n$.

Совокупность $\{e_1,\ldots, e_n\} \subseteq M$ называют A-*базисом* модуля M.

Подмодуль $K \subseteq\subseteq M$ называют A-*подпространством* A-пространств а M, если его можно директно дополнить до модуля M.

Примечание 2

- A-пространство можно согласно приведенного определения равносильно характеризовать как конечно порожденный свободный модуль над локальным кольцом A.
- Для A-пространств над локальными кольцами специальных типов вводят специальную терминологию − для наших целей, например, *модуль Вейля*, в случае когда A является алгеброй Вейля (см. напр. [26]).

Приведем (теорема 4) некоторые известные свойства A-пространств (см. [31], [3]). Они являются следствием следующей теоремы:

Теорема 3 (Лемма Накаяма) *Пусть M − конечно образованный A-модуль, A − локальное кольцо. Тогда*

• *если a собственный идеал кольца A со свойством aM=M, то M=o,*

• *если a собственный идеал кольца A и N подмодуль модуля M со свойством M= aM+N, то M=N.*

Теорема 4 *Пусть A − локальное кольцо с максимальным идеалом a. Тогда для A-пространств а M имеет место:*

• *Совокупность* G *является совокупностью генераторов M тогда и только тогда, когда* G *порождает mod aM векторное пространство M/ aM над A/ aA.*

• *Совокупность* G *является минимальным множеством генераторов M тогда и только тогда, когда G является базисом mod aM векторного пространства M/ aM над A/ aA.*

• *Каждая совокупность генераторов M содержит минимальное множество генераторов M.*

• *Если $\{e_1,\ldots, e_n\}$ и $\{u_1,\ldots, u_m\}$ являются минимальными совокупностьями генераторов, то $m=n$ и существует автоморфизм M со свойством $e_i \mapsto u_i$, $1 \le i \le n$.*

Примечание 5 Из предложения (d) предыдущей теоремы непосредственно следует, что *произвольные два базиса A-пространства имеют одинаковое число элементов*, которое можем назвать его *A-размером*; это утверждение справедливо потому, что *A* − коммутативное кольцо (см. [1]).

Примечание 6 Применяя экзактные последовательности, из выше сказанного вытекает (см. [31] *mcd*), что *любое A-подпространство A-*

пространства M является тоже A-пространством.

Обратный вопрос, т.е. можно ли любой подмодуль *M*, который одновременно *A*-пространство, директно дополнить до модуля *M* (т.е. если он тоже *A*-подпространство), McDonald оставляет открытым. Ответ, в общем случае, не положителен, это довод почему иногда понятие *A-подпространства* свободного конечномерного *A*-модуля вводится как *свободный* подмодуль, который можно директно дополнить *свободным* подмодулем (ср. напр. [7]). Здесь мы будем придерживаться более общего определения Макдональда; как покажем, в случае *A*-пространств над кольцами, определенными в п. 2, оба способа введения *A*-пространств совпадают (см. теорема 15).

Подмодули и подпространства *A*-пространств

Рассмотрим структуры *A*-пространств. Предметом нашего интереса будут *A*-пространства над локальными кольцами, а прежде всего, над локальными алгебрами. Натуральным обобщением дуальных чисел, введенных уже в 19 веке Клиффордом [10], является *плюральная алгебра*, как линейная алгебра над коммутативным телом *T* генерированная одним нильпотентом, порядок которого является порядком этой алгебры (см. [9]).

Определение 7 *Плюральной алгеброй порядка m над телом T понимается любая линейная алгебра над телом T, которая как векторное пространство над T имеет базис*

$$\{1,\eta,\eta^2,\ldots,\eta^{m-1}\} \text{ со свойством } \eta^m = 0$$

Примечание 7 Символом $p_0,\ldots p_{m-1}$ будем для всякой плюральной алгебры A обозначать систему проекций $A \to T$ естественно определенную для $k = 0,\ldots,m-1$ следующим образом:

$$\forall \beta \in A,\ \beta = \sum_{i=0}^{m-1} b_i \eta^i; \quad p_k(\beta) \overset{def}{=} b_k.$$

Легко показать следующие свойства плюральных алгебр:

Лемма 8 *Пусть* A − *плюральная алгебра порядка* m, η − *ее генератор. Тогда имеет место:*

- A − *локальное кольцо с максимальным идеалом* $\mathfrak{a}=\eta A$,
- *идеалы* $\eta^j A, 1\le j\le m$, *являются всеми собственными идеалами в* A,
- *кольцо* A *изоморфно фактор кольцу полиномов* $T[x]/(x^m)$,
- *линейная алгебра* A *изоморфна линейной алгебре матриц* $\mathrm{M}_{m\times m}(T)$ *вида*

$$\begin{pmatrix} b_0 & b_1 & \dots & b_{m-1} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & b_0 & b_1 \\ 0 & \dots & 0 & b_0 \end{pmatrix}.$$

Напомним понятие *алгебры Вейля* ([26]).

Определение 9 *Алгеброй Вейля порядка* m *называем действительную линейную алгебру* A, *которая одновременно является локальным кольцом и для максимального идеала* $\mathfrak{a}$ *выполняются условия:*

- $\mathfrak{a}^{m-1}\neq 0 \wedge \mathfrak{a}^m = 0$,
- $A/\mathfrak{a}=\mathbb{R}$,
- $\mathfrak{a}$ *является конечномерным векторным пространством.*

Размерность векторного пространства $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2$ называют *шириной алгебры* A.

Имеет место (используя лемму 8 и [26]):

Теорема 10 *Вейлевыми алгебрами данного порядка и ширины* 1 *являются только все действительные плюральные алгебры того же порядка.*

Примечание 11 A-пространства над плюральными T-алгебрами являются для $T=\mathbb{R}$ Вейлевыми модулями.

В случае, когда A − локальное кольцо с максимальным идеалом порядка m, имеет место следующая теорема:

Теорема 12 *Пусть M − A-пространство и* $\mathrm{G}=\{e_1,\ldots,e_r\}$ *− некоторая его система генераторов. Если* $\{u_1,\ldots,u_k\}$ *некоторая система линейно независимых элементов M, тогда*

- $k \le r$,
- *после подходящего перенумерирования элементов* $e_1,\ldots,e_r$ *образует* $\mathrm{H}=\{u_1,\ldots,u_k,e_{k+1},\ldots,e_r\}$ *систему генераторов* A*-пространства* M,
- *если система* G *линейно независима, то линейно независима и система* H.

Доказательство. Когда $m=1$ (т.е. $\mathfrak{a}=\{0\}$), то A является полем и получим хорошо известный случай утверждения. В дальнейшем будем считать, что $m>1$. Доказательство проведем методом математической индукции по k.

(i) Пусть k=1.

В этом случае (a) выполняется очевидно.

Ad (b): Пусть $\boldsymbol{u}_1=\sum_{i=1}^{r}\xi_i\boldsymbol{e}_i$. Так как u_1 − линейно независим, то среди $\xi_1,\ldots,\xi_r$ хотя бы одна единица − в противном случае произведением приведенного представления u_1 с некоторым ненулевым элементом μ из a^{m-1} мы получим $\mu u_1 = o$, что бы противоречило его линейной зависимости. Если, напр. ξ_1 – единица, то можно записать $e_1 = \xi_1^{-1} u_1 + \sum_{i=2}^{r} (-\xi_1^{-1}\xi_i) e_i$, отсюда вытекает, что $[u_1, e_2, \dots, e_r] = M$.

(ii) предполагаем, что (a), (b) выполняется для всех $k-1, k \geq 2$.

Из линейной независимости $\{u_1, \dots, u_k\}$ вытекает линейная независимость $\{u_1, \dots, u_{k-1}\}$. Согласно предположения индукции после подходящей перенумерации элементов G порождают $\{u_1, \dots, u_{k-1}, e_k, \dots, e_r\}$ модуль M. Для $k-1=r$ получим $[u_1, \dots, u_{k-1}] = M$, что противоречит предположению линейной независимости совокупности $\{u_1, \dots, u_{k-1}, u_k\}$, поэтому $k-1<r$, следовательно верно свойство (a).

Ad (b): Тогда элемент u_k можно согласно предположению записать в виде

$$\boldsymbol{u}_k = \sum_{i=1}^{k-1} \xi_i \boldsymbol{u}_i + \sum_{i=k}^{r} \xi_i \boldsymbol{e}_i. \tag{1}$$

На основании линейной независимости $\{u_1, \dots, u_k\}$ вытекает, что среди $\xi_k, \dots, \xi_r$ хотя бы одна единица – в противном случае произведением приведенного элемента u_k с некоторым ненулевым элементом μ из a^{m-1} мы получим $(\mu\xi_1) u_1 + \dots + (\mu\xi_{k-1}) u_{k-1} - \mu u_k = o$, что является противоречием с линейной независимостью данного множества. Пусть, не теряя общности, ξ_k – единица. Тогда из ((1)) следует $e_k = \sum_{i=1}^{k-1} (-\xi_k^{-1}\xi_i) u_i + \sum_{i=k+1}^{r} (-\xi_k^{-1}\xi_i) e_i$, отсюда вытекает, что $[u_1, \dots, u_k, e_{k+1}, \dots, e_r] = M$, таким образом мы доказали (b).

Из предыдущих выкладок следует, что из линейной независимости G вытекает линейная независимость H, т.е. выполняется (c).

Следствие 13

- Если у A-пространства есть M один базис образованный n элементами, то любой его базис имеет тоже n элементов. Число n называется A-размерностью модуля M.

(Это справедливо, как мы уже сказали в замечании, для всякого свободного модуля над коммутативным кольцом)

- Из любой системы генераторов A-пространства M можно выбрать базис М. (Это к тому же вытекает из Теоремы (с) для всякого модуля над локальным кольцом)

В нашем случае сверх того верно:

- Любую линейно независимую систему можно дополнить на базис A-пространства M.
- Любая максимальная линейно независимая система является базисом A-пространства M.

Из Следствия 14 вытекает, что для A-пространств над локальным кольцом нами рассматриваемого типа, верно и обратное утверждение к предложению замечания 6. Директными компонентами M являются таким образом все его свободные подмодули, что выражается следующей теоремой:

Теорема 14 *Подмодуль K A-пространства M является A-подпространством тогда и только тогда, когда является свободным подмодулем A-модуля M (т.е. если K есть A-пространством).*

Пересечение A-подпространств, и даже сумма, необязаны быть A-пространством. Следующая теорема показывает, что пересечение A-подпространств является A-пространством тогда и только тогда, когда их сумма является A-пространством. Напомним, что два подпространства называются *трансверсальными*, если их пересечеие и сумма − A-подпространства (см. напр. [36]).

Следующая теорема, так как и все утверждения, которые мы привели, справедлива для A-пространств над любым локальным кольцом с ниль потентным максимальным идеалом. Ее детальное доказательство приведено в работе [14].

Теорема 15 *Пусть K, L − A-подпространства A-пространства M. Тогда $K+L$ является A-подпространством тогда и только тогда, когда $K\cap L$ − A-подпространство.*

В этом случае справедлива формула $dim(K+L)+dim(K\cap L)=dim K+dim Ł$.

Далее покажем критерия для того, чтобы подмодуль $K \subseteq\subseteq M$ являлся A-подпространством (см. теорема 23). Следующие найдем в следствии 39. Далее будем изучать существование и свойства системы генераторов любого подмодуля в M (см. теорема 22).

Обозначение 16 В следующем, если не сказано иначе, через A означаем плюральную T-алгебру порядка m и M n-мерное A-пространство.

Так как $T\subseteq A$, очевидно, что любой A-(под)модуль можно рассматривать как векторное пространство над T.

Специально для A-(под)пространств, с учетом, что любой скаляр A можно записать в виде $\sum_{i=0}^{m-1} b_i\eta^i, b_i\in T$, вытекает:

Лемма 17 *Любое n-мерное A-пространство M является mn-мерным векторным пространством над T. Если $\{e_1,\dots,e_n\}$ − некоторый базис M как A-пространства, то система векторов $\{e_1,\dots,e_n,\boldsymbol{\eta} \boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{\eta} \boldsymbol{e}_n,\dots,\boldsymbol{\eta}^{m-1}e_1,\dots,\boldsymbol{\eta}^{m-1}e_n\}$ является базисом M как векторного пространства над T.*

Обозначение 18 Ради краткости и наглядности*, A-базисом* будем называть базис M *(как A-модуль), а T- базисом − базис M* (как векторное пространство). Подобным образом, введем в рассмотрение *A-размерность* и *T-размерность. T-базис* и *T-размерность* можно рассматривать у каждого подмодуля $K \subseteq\subseteq M$.

В дальнейшем понятиями *базис, размерность* и *семейство генераторов* любого *A*-(под)модуля всегда понимаем базис, размерность и, соответственно, семейство генераторов **над** *A*.

Следствие 19 *Пусть M произвольное A-пространство и $\{e_1,\dots,e_n\}$ − A-базис. Определим систему векторных подпространств $P_0,\dots,P_{m-1}$ над T:*

$$P_j = [\eta^j \boldsymbol{e}_1,\dots,\eta^j \boldsymbol{e}_n],\ 0 \le 1 \le m-1,$$

Тогда имеет место:

- $M = P_0 \oplus P_1 \oplus \dots \oplus P_{m-1}$,
- $\forall\ \mathrm{x} \in M\ \exists!(\mathrm{x}_0,\dots,\mathrm{x}_{m-1}) \in P_0^m :\quad \mathrm{x} = \sum_{i=0}^{m-1} \eta^j\ \mathrm{x}_j$.

Элемент $\eta \in A$ порождает на A-пространстве M естественным способом эндоморфизм (линейный оператор), который обозначим также η, следующим условием:

$$\forall \boldsymbol{x} \in M: \eta(\boldsymbol{x}) = \eta \boldsymbol{x}. \tag{2}$$

Пусть K − подмодуль *A*-пространства M и $\vartheta = \eta | K$. Имеют место:

Лемма 20 *Система $\{\boldsymbol{u}_1,\dots,\boldsymbol{u}_s\}$ образует A-базис K тогда и только тогда, когда $\{\eta^{m-k}\boldsymbol{u}_1,\dots,\eta^{m-k}\boldsymbol{u}_s\}$ для каждого $k = 1,\dots,m$ является T-базисом*

$Ker\,\vartheta^k \mathrm{mod}\, Ker\,\vartheta^{k-1}$.

Теорема 21 *Существует система* $B_0,\dots,B_r$ *подмножеств в M такая, что*

- *система* $B_0 \cup \dots \cup B_{r-1} \cup B_r$ *je A-базис M,*
- *система* $\eta^{m-r}B_0 \cup \eta^{m-r+1}B_1 \cup \dots \cup \eta^{m-1}B_{r-1}$ *образует над A модуль K.*

При этом $r, 1 \le r \le m,$ *– натуральное число со свойством* $K \subseteq Ker\,\eta^r \wedge K \not\subset Ker\,\eta^{r-1}$.

Доказательство. Рассмотрим эндомофизм η (см. (2)), которого ограничение $\vartheta = \eta \,|\, K$ является эндоморфизмом на K. Так как M – свободный модуль, то из [25] вытекает, что

$$K \cap \eta^j M = Ker\,\vartheta^{m-j}, 0 \le j \le m. \qquad (3)$$

Введем обозначение $r \in \mathbb{N}, 1 \le r \le m,$ для которого $K \subseteq Ker\,\eta^r \wedge K \not\subset Ker\,\eta^{r-1}$. Построим семейство элементов $\boldsymbol{u}_1,\dots,\boldsymbol{u}_{s_0},\boldsymbol{u}_{s_0+1},\dots,\boldsymbol{u}_{s_1},\boldsymbol{u}_{s_1+1},\dots,\boldsymbol{u}_{s_2},\dots,\boldsymbol{u}_{s_{r-2}+1},\dots,\boldsymbol{u}_{s_{r-1}}$, которые имеют следующее свойство:

$$\eta^{r-k}\boldsymbol{u}_1,\dots,\eta^{r-k}\boldsymbol{u}_{s_0},\eta^{r-k-1}\boldsymbol{u}_{s_0+1},\dots,\eta^{r-k-1}\boldsymbol{u}_{s_1},\dots,\boldsymbol{u}_{s_{r-k-1}+1},\dots,\boldsymbol{u}_{s_{r-k}}$$

образуют T-базис $\mathrm{Ker}\,\vartheta^k \mod \mathrm{Ker}\,\vartheta^{k-1}, 1 < k < r-1$.

Так как $\{\boldsymbol{u}_1,\dots,\boldsymbol{u}_{s_0}\} \subseteq Ker\,\vartheta^r$, то, учитывая (3), эти элементы принадлежат $\eta^{m-r}M$, следовательно существуют $\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_{s_0}$ из M такие, что

$$\boldsymbol{u}_i = \eta^{m-r}\boldsymbol{v}_i, 1 \le i \le s_0. \qquad (4)$$

Аналогично, из $\{\boldsymbol{u}_{s_{r-k-1}+1},\dots,\boldsymbol{u}_{s_{r-k}}\} \subseteq Ker\,\vartheta^k$ вытекает существование $\boldsymbol{v}_{s_{r-k-1}+1},\dots,\boldsymbol{v}_{s_{r-k}}$ из M со свойствами

$$\boldsymbol{u}_i = \eta^{m-k}\boldsymbol{v}_i, s_{r-k-1}+1 \le i \le s_{r-k}, prok = 1,\dots,r-1. \qquad (5)$$

Положив $B_0=\{\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_{s_0}\}$ а $B_{r-k}=\{\boldsymbol{v}_{s_{r-k-1}+1},\dots,\boldsymbol{v}_{s_{r-k}}\}, k=r-1,\dots,1$ мы убедимся, что данные множества имеют требуемые свойства.

Из приведенной выше леммы 20 вытекает следующая теорема.

Теорема 22 *Подмодуль K является A-подпространством в M тогда и только тогда, когда существует* $s\in \mathbb{N}_0$ *так, что для произвольного* $k=1,\dots,m$ *выполняется условие* $\dim Ker\,\vartheta^k \bmod Ker\,\vartheta^{k-1}=s$. *В этом случае s является A-размерностью* K.

2. Кольцо эндоморфизмов A-пространств

Оказывается, что кольцо эндоморфизмов A-пространства M и структура его идеалов (удивительным образом) отражают полностью структуру A-пространства, его A-подмодулей и A-подпространств.

Теорема 23 *Пусть* K – *подмодуль* A*-пространства* M. *Тогда на* M *существуют эндоморфизмы* f *и* g *такие, что*[1]

$$Ker\, f=S,\ Im\, g=S.$$

Доказательство приведенной выше теоремы основывается прежде всего на теореме 21.

Обозначение 24

• Символом P обозначем кольцо эндоморфизмов A-пространства M, т.е. $P=End(M),$ сложением эндоморфизмов $f,g\in P$ подрозумеваем эндоморфизм $(fg)(\boldsymbol{x})=g(f(\boldsymbol{x}))$.

[1] Заметим, что в общем случае эта теорема для модулей над любым кольцом не имеет место (примером тому (свободный) модуль $\mathbb{Z}$, его подмодуль четных чисел не является ядром никакого эндоморфизма на $\mathbb{Z}$)

• Для $J \subseteq P$ символом $L(J)$ обозначаем левый анигилятор подмножества J, т.е.

$$L(J) = \{ f \in P; \forall g \in J : fg = o \}$$

и символом $R(J)$ правый анигилятор, т.е.

$$R(J) = \{ f \in P; \forall g \in J : gf = o \}.$$

• Символом L(P) обозначаем систему всех левых анигиляторов на кольце P и символом $R(P)$ − систему всех правых анигиляторов. Символом $U(M)$ множество всех подмодулей A-пространства M.

• Для любого подмодуля $S \in U(M)$ будем обозначать

$$N(S) = \{ f \in P; \forall \boldsymbol{x} \in S : f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{o} \}, Q(S) = \{ f \in P; \forall \boldsymbol{x} \in M : f(\boldsymbol{x}) \in S \}.$$

(Имеет место $N(S) = \{ f \in P; S \subseteq Ker\, f \}, Q(S) = \{ f \in P; Im\, f \subseteq S \}.$)

• Для каждого J в P обозначим

$$K(J) = \{ \boldsymbol{x} \in M; \forall f \in J : f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{o} \},\ M(J) = \{ \boldsymbol{x} \in M; \exists f \in J, \exists \boldsymbol{y} \in M : \boldsymbol{x} = f(\boldsymbol{y}) \}.$$

(Имеет место $K(J) = \bigcap_{f \in J} Ker\, f, M(J) = \bigcup_{f \in J} Im\, f.$)

Примечание 25 Легко убедиться в том, что для любых $J \subseteq P$, $S \subseteq U(M)$ являются $L(J)$ и $Q(S)$ левыми идеалами кольца P, а $R(J)$ и $N(S)$ − правые идеалы P.

Также справедливо, что для любых $U, S \in U(P), J, H \subseteq P$ справедливо:

$$J \subseteq H \Rightarrow K(J) \supseteq K(H), M(J) \subseteq M(H), R(J) \supseteq R(H), L(J) \supseteq L(H),$$

$$U \subseteq S \Rightarrow N(U) \supseteq N(S), Q(U) \subseteq Q(S).$$

Лемма 26 *Для любого подмодуля S в M справедливо:*

$$K(N(S)) = S, M(Q(S)) = S.$$

Доказательство приведенной выше леммы основывается на теореме 23.

Лемма 27 *Для любого подмножества* $J \subseteq P$ *справедливо:*

$$N(M(J)) = R(J), Q(K(J)) = L(J).$$

Доказательство этого утвеждения аналогично случаю, когда M – векторное пространство, см. [4].

Следствием Лемм 26 и 27 является следующее утверждение.

Лемма 28 *Для любых подмодулей* S v M *имеет место:*

$$N(S) = R(Q(S)), Q(S) = L(N(S)).$$

Примечание 29 *Из сказанного выше вытекает, что* $N(S)$ – *элемент* $R(P)$ *и* $Q(S)$ – *элемент* $L(P)$; *для всех* $S \in U(M)$.

Лемма 30 *Для любого правого анагилятора* $H \in R(P)$ *и для любого левого анигиятора* $J \in L(P)$ *справедливо:*

$$N(K(H)) = H, Q(M(J)) = J.$$

Это утверждение используя леммы 26 и 27 доказывается как и для векторных пространств (опять см. [4]).

Будем рассматривать операторы N, K, Q, M, L, R как отображения соответствующих упорядоченных множеств. Имеет место теорема треугольной теории Галуа.

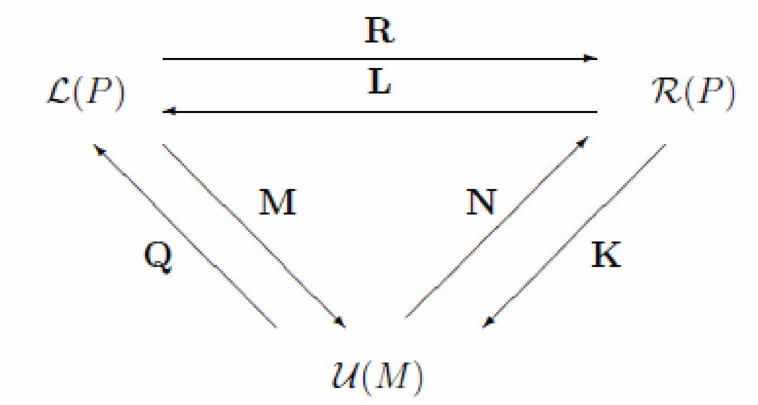
Теорема 31

• *Операторы* N *и* K *образуют взаимно обратимые антиизоморфизмы упорядоченных множеств* $(U(M),\subseteq)$ *и* $(R(P),\subseteq)$.

• *Операторы* Q *и* M *образуют взаимно обратимые изоморфизмы упорядоченных множеств* $(U(M),\subseteq)$ *и* $(L(P),\subseteq)$.

• *Операторы* L *и* R *образуют взаимно обратимые антиизоморфизмы упорядоченных множеств* $(R(P),\subseteq)$ *и* $(L(P),\subseteq)$.

• *Нижеприведенная диаграмма коммутативна.*



В семействе подмодулей $U(M)$ мы заметим собственные подмножества всех A-подпространств модуля M. Напрашивается вопрос, о том которые подмножества ей будут соответствовать в L(P), соответственно в R(P). На основании теоремы 14 мы используем свойства проекций A-пространства M.

Примечание 32 *Проекцией* A*-пространства* M *понимаем (как общепринято) любой идемпотеньный эндоморфизм* A*-пространства* M.

Принимая во внимание основные свойства проекций модулей (см. [8]) и теорему 14, очевидно, что в нашем случае ядра и образы любого идемпотентного эндоморфизма (т.е. проекции A-пространства M) A-подпространства в M.

Обозначение 33

- Символ L_0(P) и $R_0(P)$ − семейство всех левых и правых главных идеалов кольца P порожденных идемпотнтным элементом.
- Символ $U_0(M)$ − семейство всех подмодулей A-пространства M.

Лемма 34 *Для всякого A-подпространства S в M имеет место:*

- $N(S) \in R_0(P)$,
- $Q(S) \in L_0(P)$.

Лемма 35 *Если $J \in R_0(P)$, то $K(J) \in U_0(M)$.*

Теорема 36 *Если $J \in L_0(P)$, то $M(J) \in U_0(M)$.*

Теперь можем сформулировать теорему, которая говорит о соотношению между упорядоченными включениями.

Эта теорема является дополнением теоремы 31 и вместе с ней образует треугольную теорию Галуа для нами изучаемых A-пространств, при этом, уточняет описание структуры семейства подмодулей A-пространства M и анигиляторов кольца его эндоморфизмов в упомянутой теореме и посвящено A-подпространствам.

По сравнению с известными векторными пространствами (см. [4]) или тотально разложительных модулей (см. [28]) эта структура в определенном смысле богаче.

Для полноты заметим, что соответствие между упорядоченным семейством директных компонент A-модуля и семейств левых/правых идеалов кольца эндоморфизмов порожденных идемпотентом для модулей над произвольным коммутативным унитарным кольцом A изучалась в [21].

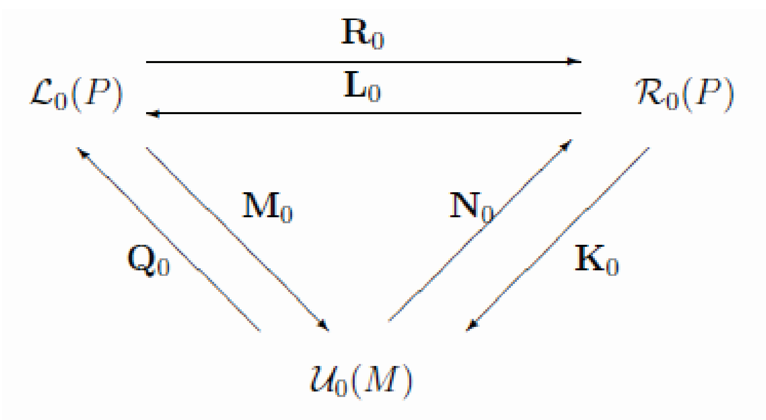
Теорема 37

• *Операторы* $N|U_0(M)$ *а* $K|R_0(P)$ *образуют взаимно обратимые антиизоморфизмы упорядоченных множеств* $(U_0(M),\subseteq)$ *и* $(R_0(P),\subseteq)$.

• *Операторы* $Q|U_0(M)$ *и* $M|L_0(P)$ *образуют взаимно обратимые изоморфизмы упорядоченных множеств* $(U_0(M),\subseteq)$ *а* $(L_0(P),\subseteq)$.

• *Операторы* $L|R_0(P)$ *и* $R|L_0(P)$ *образуют взаимно обратимые антиизоморфизмы упорядоченных множеств* $(R_0(P),\subseteq)$ *и* $(L_0(P),\subseteq)$.

• *Следующая диаграмма коммутативна; индексом "0" обозначаем* соответствующую выше приведенную рестрикцию данного отображения.



Следствие 38 *Пусть* K *− подмодуль* A*-пространства M,* P *− кольцо*

эндоморфизмов A*-пространства* M*. Тогда следующие ниже приведенные условия равносильны.*

- K *является* A*-пространством в* M*,*
- *Семейство эндоморфизмов, образ которых содержится в* K*, образует левый главный идеал кольца* P*, генерированный некоторым идемпотентным элементом из* P*,*
- *Семейство эндоморфизмов, ядро которых содержит* K*, образует правый главный идеал кольца* P*, генерированный некоторым идемпотентным элементом из* P*.*

Благодарности

Эта работа возникла в рамках гранта P201/11/0356 Чешского грантового агентства и задания Правтительства Чехии MSM 6198959214.

Литература

[1] Anderson, F. W., Fuller, F. K.: *Rings and Categories of Modules*, Springer-Verlag, New York, 1973

[2] Artin, E.: *Геометрическая алгебра*, М.: Наука, 1969.

[3] Atiah, M. F., MacDonald, I. G.: *Введение в коммутативную алгебру*, М.: Мир, 1972.

[4] Baer, R.: *Линейная алгебра и проективная геометрия*, М.: ИЛ, 1955.

[5] Barbilian, D.: Zur Axiomatik der projektiven ebenen Ringgeometrien, I, *Jahresber. Deutsc. Math.-Verein* **50** (1940), 179−229.

[6] Bayro-Corrochano, Kähler, D.: Kinematics of Robot Manipulators in the Motor Algebra, in: Sommer, G. (ed.) *Geometric Computing with Clifford Algebras.* Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg, 2001, 471−488.

[7] Bingen, F.: Géométrie projective sur un anneau semiprimaire, *Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci. (5)*, **52** (1966), 13−24.

[8] Bourbaki, N.: *Algebre* (Russian), Nauka, Moskva, 1966.

[9] Burgetová, R., Klucký, D.: The spectrum of a Cartesian product of plural algebras, *Časopis pro pěstování matematiky*, **106**(4), 402−406 (1981).

[10] Clifford, W. K.: Preliminary Scretch of Biquaternions. *Proceed. of the London Mathemat. Soc.*, *4*, 1873.

[11] Диментберг, Ф.М.: *Винтовое исчисление и его приложения в механике*, М.: Наука, 1965.

[12] Faure, C.-A.: Morphisms of projective spaces over rings, *Adv. Geom.* **4** (2004), 19−31.

[13] Jukl, M.: Inertial law of quadratic forms on modules over plural algebra. *Mathematica Bohemica*, 120 (1995), 255−263.

[14] Jukl, M.: Grassman formula for certain type of modules. *Acta Univ.*

Palacki. Olomuc., Fac. rer. nat., Math. **34** (1995), 69−74.

[15] Jukl, M.: Sylvester Theorem for Certain Free Modules. *Acta Univ. Palacki. Olomuc., Fac. rer. nat., Math.* **35** (1996), 47−51.

[16] Jukl, M.: Inertial law of symplectic forms on modules over plural algebra. *Mathematica Bohemica*, 122 (1997), 191−196.

[17] Jukl, M.: Canonical matrices of λ-bilinear forms on modules over a certain local ring. *Discussiones Mathematicae, Algebra and Stochastic Methods*, 17 (1997), 9−17.

[18] Jukl, M.: Desargues Theorem for Klingenberg projective plane over certain local ring. *Acta Univ. Palacki. Olomuc., Fac. rer. nat., Math.* **36** (1997), 33−40.

[19] Jukl, M.: A remark on spaces over a special local ring. *Mathematica Bohemica*, 123 (1998), 243−247.

[20] Jukl, M.: On homologies of Klingenberg projective spaces over special commutative local rings. *Publicationes Mathematicae*, Universitas Debreciensis, 55 (1999), 113−121.

[21] Jukl, M.: Galois Triangle Theory for Direct Summands of Modules. *Acta Univ. Palacki. Olomuc., Fac. rer. nat., Math.* **39** (2000), 67−71.

[22] Kreuzer, A.: Free modules over hjelmslev rings in which not every maximal linearly independent subset is a basis *J. of Geometry.*, **45** (1992), 105−113

[23] Klingenberg, W.: Desarguessche Ebenen mit Nachbarelement, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **20** (1955), 97−111.

[24] Klingenberg, W.: Projektive Geometrien mit Homomorphismus, *Math. Annalen*, **132** (1956), 180−200.

[25] Klucký, D.: A contribution to the theory of modules over finite dimensional linear algebras, *Časopis pro pěstování matematiky*, **109**, 113−117 (1984)

[26] Kureš, M.: Weil Modules and Gauge Bundles *Acta Math. Sinica, English Series*, **22**(1), 271−278 (2006)

[27] Lambek, J.: *Lectures on Rings and Modules*, Blaisdell Publishing Company, Waltha-Toronto-London, 1966

[28] Machala, F.: Über Automorphismen eines Annullatorenverbandes gewisser teilringe im Endomorphismenring eines homogenen vollstanding reduziblen Moduls, *Acta Univ. Palacki. Olomuc, Fac. rer. nat.,* **41**, 1973, 15−26

[29] Machala, F.: Desarguessche Affine Ebenen mit Homomorphismus, *Geometriae Dedicata* **3** (1975), 493-509.

[30] Machala, F.: it Fundamentalsätze der projektiven Geometrie mit Homomorphismus, Rozpravy ČSAV, Řada Mat. Přírod. Věd, 90 (1980), no. 5.

[31] McDonald, B. R.: *Geometric Algebra over Local Rings,* Pure and applied

mathematics, M. Dekker, New York, 1976.

[32] McDonald, B. R.: *Linear algebra over Commutative Rings,* Pure and applied mathematics, M. Dekker, New York, 1984.

[33] Rant, W. H.: Rings whose modules require an invariant number of minimal generators. *Missouri J. Math. Sci.*, **13**(1), 43−46 (2001).

[34] Shoham, M., Brodsky, V.: *Dual numbers representation of rigid body dynamics*. Haifa, Technion - Israel Institute of Technology, 1996.

[35] Veldkamp, F. D.: Projective planes over rings os stable rank 2, *Geom. Dedicata* **11** (1981), 285−308.

[36] Veldkamp, F. D.: Geometry over rings,in: Buekenhout, F. (ed.) *Handbook of incidence geometry.* Elsevier, Amsterdam - Lausanne - New York etc., 1994, 1033−1085

[37] Vishnevskii, V. V.: Manifolds over plural numbers and semitangent structures , *Journal of Mathematical Sciences*, **51**, (1990), 2613-2642.

Марек Юкл (к.ф.- м.наук),

Кафедра алгебры и геометрии, Факультет естественных наук, Университет им. Ф. Палацкого,

17 листопаду 12, г. Оломоуц, Чешская Республика

Marek.jukl@upol.cz.

Ленка Юклова (к.ф.- м.наук),

Кафедра алгебры и геометрии, Факультет естественных наук, Университет им. Ф. Палацкого,

17 листопаду 12, г. Оломоуц, Чешская Республика

Lenka.juklova@upol.cz.

Йозеф Микеш (профессор, д.ф.- м.наук),

Кафедра алгебры и геометрии, Факультет естественных наук, Университет им. Ф. Палацкого,

17 листопаду 12, г. Оломоуц, Чешская Республика

Josef.mikes@upol.cz.

On submodules of free finite dimensional modules

Marek Jukl, Lenka Juklová, Josef Mikeš

Abstract. This article deals with structure of submodules of free finite dimensional modules over local rings A of a special type - s.c. A-spaces

Key words and phrases: local ring, free module, A-space, ring of endomorphisms.

Mathematics Subject Classification: Primary 51C05, Secondary 13C10.