

# Proceedings

of the

## INTERNATIONAL GEOMETRY CENTER

Volume 9, No. 2, 2016

Editor in Chief: **Kirillov V. H.**

Scientific Editor in Chief: **Prishlyak A. O.**

Deputes Editor in Chief: **Mikityuk I. V., Milka A. D., Shelekhov A. M.**

Managing Editor: **Konovenko N. G.**

Executive Secretary: **Fedchenko Ju. S**

### Editorial board:

**Balan V.**  
Romania, Bucharest

**Banakh T. O.**  
Ukraine, Lviv

**Fedosov S. N.**  
Ukraine, Odessa

**Fomenko A. T.**  
Russia, Moscow

**Fomenko V. T.**  
Russia, Taganrog

**Glushkov A. V.**  
Ukraine, Odessa

**Haddad M.**  
Syria, Damask

**Kats I. S.**  
Ukraine, Odessa

**Kirichenko V. F.**  
Russia, Moscow

**Maksymenko S. I.**  
Ukraine, Kyiv

**Matsumoto K.**  
Japan, Yamagata

**Mashkov O. A.**  
Ukraine, Lviv

**Mikesh J.**  
Czech Republic, Olomouc

**Mormul P.**  
Poland, Warsaw

**Moskaliuk S.**  
Austria, Wien

**Plachta L.**  
Poland, Krakov

**Polulyakh E. O.**  
Ukraine, Kyiv

**Rahula M. O.**  
Estonia, Tartu

**Sabitov I. K.**  
Russia, Moscow

**Savchenko O. G.**  
Ukraine, Kherson

**Sergeeva A. S.**  
Ukraine, Odessa

**Shvets V. T.**  
Ukraine, Odessa

**Shurygin V. V.**  
Russia, Kazan

**Volkov V. E.**  
Ukraine, Odessa

**Zadorozhnyj V. G.**  
Ukraine, Odessa

**Zarichnyi M. M.**  
Ukraine, Lviv

**Zelinskyi Y. B.**  
Ukraine, Kyiv

## PROCEEDINGS OF THE INTERNATIONAL GEOMETRY CENTER

The journal is focusing on coverage of the most important problems in mathematics and its applications, particularly in differential geometry, topology, mathematical physics and dynamical systems. It publishes peer reviewed original papers and surveys especially on the following topics: algebraic and analytical methods in geometry; differential geometry as a whole; geometry and topology of differentiable manifolds; general and algebraic topology; geometric and topological methods in the natural sciences; application of geometric methods to modern problems of continuum mechanics, control theory, and mathematical physics; history and methods of teaching mathematics.

Manuscripts are accepted for review with the understanding that the same work is not already published, is not under consideration for publication elsewhere, and that its submission for publication has been approved by all of the coauthors.

Papers are published in Ukrainian, English and Russian.

Journal conducts active cooperation with the following World abstracting and indexing databases: Vernadsky National Library of Ukraine, CrossRef, eLibrary.ru, Index Copernicus International, Google Scholar, Directory of Open Access scholarly Resources (ROAD), Open Academic Journals Index (OAJI), EBSCOhost, Directory Indexing of International Research Journals - Citefactor, WorldCat, Bielefeld Academic Search Engine (BASE), ResearchBib, Ulrich's Periodicals Directory, Directory of Open Access Journals (DOAJ).

**Publisher:** ONAFT, Odesa, Kanatna str., Ukraine, 65039.

**Web page:** <http://www.geometry-center.com>

**Emails:** [proceedings.igc@gmail.com](mailto:proceedings.igc@gmail.com), [geom-odessa@ukr.net](mailto:geom-odessa@ukr.net)

**Technical support:** ONAFT Coordinating Center of Scientific Journals' Publishing.

## ПРАЦІ МІЖНАРОДНОГО ГЕОМЕТРИЧНОГО ЦЕНТРУ

Метою видання журналу «Праці міжнародного геометричного центру» є консолідація та підтримка досліджень з геометрії, топології та динамічних систем. Тематична спрямованість журналу пов'язана з висвітленням найбільш важливих та актуальних проблем у галузі математики та її застосувань, зокрема у диференціальній геометрії, топології, математичній фізиці та динамічних системах.

Публікація статей здійснюється за такими напрямками: алгебраїчні методи в геометрії; диференціальна геометрія у цілому; геометрія та топологія диференційованих многовидів; загальна й алгебраїчна топологія; геометричні й топологічні методи у природничих науках; застосування геометричних методів до сучасних задач механіки суцільних середовищ, теорії управління та математичної фізики; історія й методика викладання математики.

До розгляду приймаються лише статті, які є оригінальними роботами авторів, не були опубліковані та не перебувають на розгляді до публікації в інших виданнях.

Роботи публікуються українською, англійською та російською мовами.

Журнал індексується такими світовими базами індексування та реферування: Національна бібліотека України імені Вернадського, CrossRef, eLibrary.ru, Index Copernicus International, Google Scholar, Directory of Open Access scholarly Resources (ROAD), Open Academic Journals Index (OAJI), EBSCOhost, Directory Indexing of International Research Journals - Citefactor, WorldCat, Bielefeld Academic Search Engine (BASE), ResearchBib, Ulrich's Periodicals Directory, Directory of Open Access Journals (DOAJ).

**Видавник:** ОНАХТ, вул. Канатна, 112, м. Одеса, Україна, 65039.

**Веб-сторінка журналу:** <http://www.geometry-center.com>

**Електронні адреси:** [proceedings.igc@gmail.com](mailto:proceedings.igc@gmail.com), [geom-odessa@ukr.net](mailto:geom-odessa@ukr.net)

**Технічна підтримка:** Координаційний центр видання наукової періодики ОНАХТ.

Рекомендовано до друку та розташування в мережі Інтернет Вченою Радою ОНАХТ 01.07.2016р., протокол №12.

Зареєстровано Міністерством юстиції України. Свідоцтво: Серія КВ № 13819 - 2793Р від 19.11.2007.

Видається з 2008 року, виходить 4 рази на рік.

Відповідальність за достовірність інформації несе автор публікації.

Матеріали друкуються мовою оригіналу. Передрукування матеріалів журналу дозволяється лише за згодою редакції. Ліцензія СС-ВУ.

# One-dimensional foliations on topological manifolds

S. Maksymenko, E. Polulyakh

**Abstract.** Let  $X$  be an  $(n + 1)$ -dimensional manifold,  $\Delta$  be a one-dimensional foliation on  $X$ , and  $p : X \rightarrow X/\Delta$  be a quotient map. We will say that a leaf  $\omega$  of  $\Delta$  is *special* whenever the space of leaves  $X/\Delta$  is not Hausdorff at  $\omega$ . We present necessary and sufficient conditions for the map  $p : X \rightarrow X/\Delta$  to be a locally trivial fibration under assumptions that all leaves of  $\Delta$  are non-compact and the family of all special leaves of  $\Delta$  is locally finite.

## 1. INTRODUCTION

Study of the topological structure of flow lines foliations has a long history and leads back to H. Poincaré. The question when a partition into curves is a foliation was considered by H. Whitney [46], [47]. In two-dimensional case one-dimensional foliations appeared as level-sets of pseudo-harmonic functions in W. Kaplan [21], [22].

Let  $\Delta$  be a one-dimensional foliation on  $\mathbb{R}^2$ , and  $\mathbb{R}^2/\Delta$  be the space of leaves endowed with the quotient topology. Notice that  $\mathbb{R}^2/\Delta$  is usually non-Hausdorff. W. Kaplan [21] showed that

- (1) the quotient mapping  $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2/\Delta$  is a locally trivial fibration with fiber  $\mathbb{R}$ ;
- (2) there exists at most countably many leaves  $\{\omega_i\}_{i \in A}$  of  $\Delta$  such that the complement  $\mathbb{R}^2 \setminus \{\omega_i\}_{i \in A}$  is a disjoint union  $\bigsqcup_{j \in B} S_j$ , where each  $S_j$  is homeomorphic with  $(0, 1) \times \mathbb{R}$  so that the lines  $t \times \mathbb{R}$ ,  $t \in (0, 1)$ , correspond to the leaves of  $\Delta$ ;
- (3) there exists a pseudoharmonic function  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  having no singularities and whose foliation by connected components of level-sets coincides with  $\Delta$ .

---

*2010 Mathematics Subject Classification:* 57R30, 55R10

*Keywords:* foliation, non-compact surface, fiber bundle, selection

See also W. Boothby [5], [6], M. Morse and J. Jenkins [17], [18], [19], [20] and M. Morse [33], [32] for extensions of Kaplan's results to foliations with singularities.

A. Haefliger and G. Reeb [14] studied general one-dimensional *non-Hausdorff* manifolds and showed, in particular, that the above result (3) of W. Kaplan can be deduced from Poincaré-Bendixon theorem, see also [13], [37].

Later C. Godbillon and G. Reeb [10] classified locally trivial fibrations over a *non-Hausdorff letter*  $Y$ . Though they considered a very special case their methods clarify the general situation.

The question when for an arbitrary  $k$ -dimensional foliation  $\Delta$  on  $X$  the quotient map  $p : X \rightarrow X/\Delta$  has homotopy lifting properties was considered in C. Godbillon [11], see also G. Meigniez [29] and [30] for the criterion when  $p$  is a Serre fibration or a locally trivial fibration but mostly in smooth category. J. Harrison [15] studied similar problem concerning geodesic flows without compact orbits. Also foliations by flow lines on 3-manifolds are classified by S. Matsumoto [27].

In recent years a progress in the theory of Hamiltonian dynamical systems of small degrees of freedom increased an interest to the structure of level-sets functions on surfaces, see e.g. A. Fomenko and A. Bolsinov [4], A. Oshemkov [34], V. Sharko [41], [42], V. Sharko and Yu. Soroka [43], E. Polulyakh and I. Yurchuk [36], E. Polulyakh [35].

Homotopy properties of foliations on surfaces glued from strips similarly to (2) are studied in S. Maksymenko and E. Polulyakh [25] and [26] and Yu. Soroka [44].

In [26] the authors extended Kaplan's result (2) to foliations on arbitrary non-compact surfaces  $X$ . Namely, under certain assumptions including (1), i.e. that  $p : X \rightarrow X/\Delta$  is a locally trivial fibration, the topological structure of the closures  $\overline{S_j}$  of strips  $S_j$  was described.

In the present paper we consider an arbitrary one-dimensional foliation  $\Delta$  with all non-compact leaves on a topological manifold  $X$ . Our main result gives necessary and sufficient conditions for the quotient map  $p : X \rightarrow X/\Delta$  to be a locally trivial fibration, see Theorem 2.8.

As mentioned above such types of questions were extensively studied. However, the essentially new features of Theorem 2.8 in comparison e.g. with [11], [30] and others, is that we work in  $C^0$  category only and give a characterization in terms of topology of the quotient space  $X/\Delta$ .

## 2. ONE-DIMENSIONAL FOLIATIONS

Let  $\mathbb{R}_+^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_n \geq 0\}$  be the closed half-space in  $\mathbb{R}^n$ .

**Definition 2.1** (cf. [8]). Let  $X$  be an  $(n+1)$ -dimensional topological manifold,  $n \geq 1$ . A *foliated chart* on  $X$  of codimension  $n$  is a pair  $(U, \varphi)$ , where  $U \subset X$  is open and  $\varphi : U \rightarrow (a, b) \times B^n$  is a homeomorphism with  $B^n$  being an open subset of  $\mathbb{R}_+^n$  and  $a < b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ . The set  $P_y = \varphi^{-1}((a, b) \times \{y\})$ ,  $y \in B^n$ , is called a *plaque* of this foliated chart.

**Definition 2.2** (cf. [8], [45]). Let  $\Delta = \{\omega_\alpha \mid \alpha \in A\}$  be a partition of  $X$  into pathconnected subsets  $\omega_\alpha$  of  $X$ . Suppose that  $X$  admits an atlas  $\{U_i, \varphi_i\}_{i \in \Lambda}$  of foliated charts of codimension  $n$  such that, for each  $\alpha \in A$  and each  $i \in \Lambda$ , every pathcomponent of a set  $\omega_\alpha \cap U_i$  is a plaque. Then  $\Delta$  is said to be a *foliation of  $X$  of dimension 1* (and *codimension  $n$* ) and  $\{U_i, \varphi_i\}_{i \in \Lambda}$  is called a *foliated atlas associated to  $\Delta$* . Each  $\omega_\alpha$  is called a *leaf* of the foliation and the pair  $(X, \Delta)$  is called a *foliated manifold*.

**Remark 2.3.** In [21] one-dimensional foliations on the plane were also called *regular families of curves*.

In what follows we will assume that  $X$  is endowed with some one-dimensional foliation  $\Delta$ . We will also consider only foliated charts included into some (maximal) foliated atlas associated to  $\Delta$ .

Let  $\omega$  be a leaf of  $\Delta$ . If  $\omega$  is compact, then it is homeomorphic with the circle. Otherwise, there exists a continuous bijection  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \omega$ . Moreover, if  $\bar{\phi} : \mathbb{R} \rightarrow \omega$  is another continuous bijection, then  $\phi^{-1} \circ \bar{\phi} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  is a homeomorphism, c.f. [11, Proposition 6].

Recall that a continuous map  $f : A \rightarrow B$  is called *proper* whenever for each compact  $K \subset B$  its inverse image  $f^{-1}(K)$  is compact. The following lemma is easy and we leave it for the reader.

**Lemma 2.4.** *Consider the following conditions on  $\omega \in \Delta$ :*

- (e) *there exists an embedding  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow X$  with  $\phi(\mathbb{R}) = \omega$ ;*
- (p) *there exists a proper injective continuous map  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow X$  with  $\phi(\mathbb{R}) = \omega$ ;*
- (p)' *any injective continuous map  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow X$  with  $\phi(\mathbb{R}) = \omega$  is proper;*
- (c)  *$\omega$  is a closed subset of  $X$ .*

*Then the following equivalences hold true:*

$$(e) \ \& \ (c) \Leftrightarrow (p) \Leftrightarrow (p').$$

A leaf  $\omega$  satisfying condition (p) of Lemma 2.4 will be said to be *properly embedded*<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup> In the book [45, §16] a leaf is called *proper* if it satisfies condition (e).

The union of all leaves of  $\Delta$  intersecting a subset  $U \subset X$  is called the *saturation* of  $U$  and denoted by  $\mathbf{S}(U)$ . The following lemma is easy to prove.

**Lemma 2.5.** [12, Proposition 1.5], [45, Theorem 4.10] *If  $U \subset X$  is open, then  $\mathbf{S}(U)$  is open as well.*  $\square$

If  $Y$  is a manifold, then a *trivial* 1-dimensional foliation  $\Delta$  on the product  $\mathbb{R} \times Y$  is a partition of  $\mathbb{R} \times Y$  into the lines  $\mathbb{R} \times y$ ,  $y \in Y$ .

Let  $\Delta_i$  be a 1-foliation on  $X_i$ ,  $i = 1, 2$ . Then an embedding  $\psi : X_1 \rightarrow X_2$  will be called *foliated* whenever  $\psi(\omega)$  is contained in some leaf of  $\Delta_2$  for each leaf  $\omega \in \Delta_1$ .

In particular, if  $\varphi : U \rightarrow (a, b) \times B^n$  is a foliated chart as in Definition 2.1, then its inverse  $\psi = \varphi^{-1} : (a, b) \times B^n \rightarrow X$  is an open foliated embedding. In this case the set  $P_u = \psi((a, b) \times \{u\})$  is a plaque for each  $u \in B^n$ .

**Space of leaves.** Let  $Y = X/\Delta$  be the space of leaves and  $p : X \rightarrow Y$  be the corresponding quotient map. Endow  $Y$  with the *quotient topology* with respect to  $p$ . Thus a subset  $V \subset Y$  is open if and only if its inverse  $p^{-1}(V)$  is open in  $X$ .

Notice that for a subset  $U \subset X$  its saturation is  $\mathbf{S}(U) = p^{-1}(p(U))$ . In particular, Lemma 2.5 means that  $p$  is an open map.

Evidently,  $Y$  is a  $T_1$ -space if and only if each leaf of  $\Delta$  is a closed subset of  $X$ . However, in general,  $Y$  is not a Hausdorff space.

**Special points.** Let  $u \in Y$  be a point and  $\beta_u$  be a base of neighborhoods of  $u$ . Then the following set

$$\text{hcl}(u) := \bigcap_{V \in \beta_u} \overline{V}$$

will be called the *Hausdorff closure* of  $u$ . A point  $u$  will be called *special*<sup>2</sup> if  $u \neq \text{hcl}(u)$ . Notice that  $u \in \text{hcl}(v)$  if and only if any two neighborhoods of  $u$  and  $v$  intersect. The latter statement is symmetric with respect to  $u$  and  $v$ , and so it is equivalent to the assumption  $v \in \text{hcl}(u)$ . However, one easily checks that the property “belong to Hausdorff closure” is not transitive.

Evidently,  $Y$  is Hausdorff if and only if  $u = \text{hcl}(u)$  for all  $u \in Y$ , that is when  $Y$  has no special points. The set of all special points of  $Y$  will be denoted by  $\mathcal{V}$ .

We will say that a leaf  $\omega$  of  $\Delta$  is *special* if  $p(\omega)$  is a special point of  $Y$ . In particular,  $\Sigma := p^{-1}(\mathcal{V})$  is the set of all special leaves of  $\Delta$ .

The following lemma gives a characterization of special leaves and extends [10, Proposition 4].

<sup>2</sup> In [14, Definition 3] such a point is called a *branch* point. See also [10].

**Lemma 2.6.** *Let  $\omega \in \Delta$  be a leaf and  $u = p(\omega)$  be the corresponding point in  $Y$ . Then the following conditions equivalent:*

- (1)  $u$  is a special point of  $Y$ , and so  $\omega$  is a special leaf of  $\Delta$ ;
- (2) there exists a point  $v \in \text{hcl}(u)$  distinct from  $u$  and a sequence  $\{w_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  converging to both points  $u$  and  $v$ ;
- (3) there exist two sequences  $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  and  $\{y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  in  $X$  such that  $x_i$  and  $y_i$  belong to the same leaf for all  $i \in \mathbb{N}$ , that is  $p(x_i) = p(y_i)$ , and

$$\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = x \in \omega, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} y_i = y \notin \omega. \quad (2.1)$$

**Proof.** Equivalence (1) $\Leftrightarrow$ (2) is well known and easy.

(3) $\Rightarrow$ (2). Denote  $w_i = p(x_i) = p(y_i)$ ,  $i \in \mathbb{N}$  and  $v = p(y)$ . Then, by continuity of  $p$ , the sequence  $\{w_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  converges to distinct points  $u$  and  $v$ . In particular,  $v \in \text{hcl}(u)$ .

(2) $\Rightarrow$ (3). Choose any points  $x \in \omega$  and  $y \in \omega' := p^{-1}(v)$ , and let  $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  and  $\{V_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  be countable bases of topology on  $X$  at  $x$  and  $y$  respectively. Since  $p$  is open,  $p(U_i)$  and  $p(V_i)$  are open neighborhoods of  $u$  and  $v$  respectively. But these points are special and  $u \in \text{hcl}(v)$ , whence  $p(U_i) \cap p(V_i) \neq \emptyset$  for all  $i \in \mathbb{N}$ . Hence there exist  $x_i \in U_i$  and  $y_i \in V_i$  such that  $p(x_i) = p(y_i)$ . Then  $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  and  $\{y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  converge to  $x$  and  $y$  respectively.  $\square$

**Definition 2.7.** Let  $V$  be an open subset of  $\mathbb{R}_+^n$ , where  $n = \dim X - 1$  is the codimension of the foliation  $\Delta$ . A continuous map  $\gamma : V \rightarrow X$  is called a *cross section* of  $\Delta$  if

- $\gamma(V \cap \partial \mathbb{R}_+^n) \subset \partial X$ ;
- the composition  $p \circ \gamma : V \rightarrow Y$  is an injective map, that is  $u \neq v \in V$  implies that the images  $\gamma(u)$  and  $\gamma(v)$  of these points belong to distinct leaves of  $\Delta$ .

If  $x \in \gamma(V)$  and  $\omega$  is a leaf of  $\Delta$  containing  $x$ , then we will also say that  $\gamma$  *passes through*  $x$  as well as *through*  $\omega$ .

The aim of this paper is to present necessary and sufficient conditions for the map  $p$  to be a locally trivial fibration under assumption that all leaves of  $\Delta$  are non-compact.

**Theorem 2.8.** *Let  $X$  be an  $(n+1)$ -dimensional manifold and  $\Delta$  be a one-dimensional foliation on  $X$ . Suppose that all leaves of  $\Delta$  are non-compact and the family of all special leaves of  $\Delta$  is locally finite. Then the following conditions are equivalent.*

- (1) *The quotient map  $p : X \rightarrow X/\Delta$  is a locally trivial fibration with fiber  $\mathbb{R}$  and  $X/\Delta$  is locally homeomorphic with  $\mathbb{R}_+^n$  (though it is not necessary a Hausdorff space).*

- (2) For each leaf  $\omega$  there exists an open saturated neighborhood foliated homeomorphic with  $\mathbb{R} \times V$ , where  $V$  is an open subset of  $\mathbb{R}_+^n$ .
- (3) For each leaf  $\omega$  of  $\Delta$  there exists a cross section passing through  $\omega$ .

**Remark 2.9.** It is proved in [11, Chapter III, Propostion 4 and Corollary] that for arbitrary  $p$ -dimensional foliation  $\Delta$  then the quotient map

$$p : X \rightarrow X/\Delta$$

is a Serre fibration whenever it satisfies a certain variant of homotopy extension property and either has a local section at each point or the quotient  $X/\Delta$  is a (possibly non-Hausdorff manifold). See also [29] and [30] for extensions.

Our Theorem 2.8 claims that for one-dimensional foliations  $\Delta$  with locally finite family of special leaves existence of cross sections with open subsets of  $\mathbb{R}_+^n$  implies that  $p$  is even a locally trivial fibration and  $X/\Delta$  is a possibly non-Hausdorff manifold.

**Remark 2.10.** Equivalence between (1) and (2) for  $\dim X = 2$  is proved in [26] without assumption that  $Y$  is locally homeomorphic with  $\mathbb{R}$ . Also in [14, §2.2, Proposition 1] it is show that  $X/\Delta$  is a 1-manifold for one-dimensional foliation on  $\mathbb{R}^2$ .

**Remark 2.11.** R. H. Bing [2], [3] constructed a non-manifold  $B \subset \mathbb{R}^4$  such that  $\mathbb{R} \times B$  is homeomorphic with  $\mathbb{R}^4$ . In other words,  $\mathbb{R}^4$  admits a trivial partition into open arcs (being not a foliation) such that the quotient space  $B$  is not a 3-manifold. That example was improved by many authors, see e.g R. Rosen [38], J. Kim [23], J. Bailey [1], L. Rubin [39].

**Remark 2.12.** E. Dyer and M. Hamstrom [9] studied so called *completely regular* mappings  $p : X \rightarrow Y$  between metric spaces such that the inverse images of all points are in a certain sense “uniformly homeomorphic”, and get sufficient conditions when such a map is equivalent to a trivial fibration, see [9, Theorem 7], and also [28], [40] for generalizations. We consider here a similar problem, but now the space  $Y$  is not even Hausdorff, and we gave conditions when  $p$  is a locally trivial fibration.

The following statement is proved in [43, Theorem 1] for continuous functions  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , and in [30, item 3 at the end of page 3778] for smooth case.

**Theorem 2.13.** *Let  $M$  and  $N$  be two manifolds with  $\dim M = \dim N + 1$  and  $f : M \rightarrow N$  be a surjective continuous map such that*

- $f(\text{Int } M) = \text{Int } N$  and  $f(\partial M) = \partial N$ ;



- the partition  $\Delta = \{f^{-1}(c) \mid c \in N\}$  of  $M$  constitutes a one-dimensional foliation with all non-compact leaves.

Then  $f$  is a locally trivial fibration with fiber  $\mathbb{R}$ . In particular, if  $N$  is contractible, then  $f$  is a trivial fibration.

**Proof.** We claim that  $\Delta$  contains no special leaves and each leaf admits a cross section. Then it will follow from Theorem 2.8 that  $f$  is a locally trivial fibration with fiber  $\mathbb{R}$ .

*Absence of special leaves.* Let  $Y = M/\Delta$  be the space of leaves endowed with the corresponding factor topology. Then  $f$  can be written as a composition of the following maps

$$f = \theta \circ p : M \xrightarrow{p} Y \xrightarrow{\theta} N,$$

where  $\theta$  is the induced continuous bijection. Since  $N$  is Hausdorff, it follows that so is  $Y$ , and therefore  $Y$  contains no special points. Hence  $\Delta$  contains no special leaves.

*Existence of cross sections.* Let  $x \in M$  and  $\varphi : U \rightarrow (-1, 1) \times B^n$  be a foliated chart at  $x$  as in Definition 2.2 such that  $\varphi(x) = (0, 0) \in (-1, 1) \times B^n$ , where  $n = \dim N$ . Then the map  $\gamma : B^n \rightarrow M$  defined by  $\gamma(y) = \varphi^{-1}(0, y)$  is a cross section of  $\Delta$ .  $\square$

In fact, Theorem 2.8 is an easy consequence of the following statements:

**Lemma 4.6.** *Let  $\omega_0$  be a leaf of  $\Delta$ . Suppose that for each leaf  $\omega$  of  $\Delta$  contained in  $\mathbf{S}(\overline{\omega_0})$  there exists a cross section  $\gamma$  passing through  $\omega$ . Then  $\omega_0$  is properly embedded.*

**Theorem 2.14.** *Let  $\gamma : V \rightarrow X$  be a cross section intersecting only leaves being simultaneously non-compact, properly embedded, and non-special. Then the saturation  $\mathbf{S}(\gamma(V))$  is open and foliated homeomorphic with  $\mathbb{R} \times V$ .*

The proof of Theorem 2.8 will be given in §3. In §4 we will prove some general preliminary results concerning one-dimensional  $C^0$  foliations being well known for smooth case. In particular we will prove Lemma 4.6. §5 is devoted to the proof of Theorem 2.14 using E. Michael's theorems about selections of multivalued maps.

### 3. PROOF OF THEOREM 2.8

(1) $\Rightarrow$ (2), (3). Suppose the quotient map  $p : X \rightarrow Y$  is a locally trivial fibration with fiber  $\mathbb{R}$  and  $Y$  is locally homeomorphic with  $\mathbb{R}_+^n$ . This means that for each  $\omega \in \Delta$  there exist

- an open neighborhood  $V \subset Y$  of its image  $u = p(\omega)$  homeomorphic with an open subset of  $\mathbb{R}_+^n$  and

- a foliated homeomorphism  $\psi : \mathbb{R} \times V \rightarrow p^{-1}(V)$ .

Then  $p^{-1}(V)$  is an open and saturated neighborhood of  $\omega$  and  $\psi$  is a foliated homeomorphism required by (2).

Moreover, the map  $\gamma : V \rightarrow X$  defined by  $\gamma(v) = \psi(0, v)$  is a cross section passing through  $\omega$ . This proves (3).

(3) $\Rightarrow$ (2). Suppose each leaf of  $\Delta$  admits a local cross section. Then it follows from Lemma 4.6 that all leaves of  $\Delta$  are properly embedded. Let  $\Sigma$  be a family of all special leaves and  $\sigma \in \Sigma$  be a special leaf.

Since each leaf is closed and  $\Sigma$  is a locally finite family, it follows that  $\Sigma \setminus \sigma$  is a closed set, whence  $X' = (X \setminus \Sigma) \cup \sigma$  is open and saturated and contains no special leaves. Moreover, since each leaf in  $X'$  admits a local cross section, it follows from Theorem 2.14 that each leaf  $\omega \subset X'$  has an open saturated neighborhood  $W$  foliated homeomorphic with  $\mathbb{R} \times V$ , where  $V$  is an open subset of  $\mathbb{R}_+^n$ . Then  $W$  is also open in  $X$ . This proves (2).

(2) $\Rightarrow$ (1). Let  $u \in Y$  and  $\omega = p^{-1}(u)$  be the corresponding leaf of  $\Delta$ . Suppose there exist an open subset  $V \subset \mathbb{R}_+^n$  and a foliated homeomorphism  $\psi : \mathbb{R} \times V \rightarrow W_\omega$  onto some open and saturated neighborhood  $W_\omega$  of  $\omega$ . Since  $p$  is an open map, so is the composition  $p \circ \psi$ . Hence  $U_u := p(\psi(W_\omega))$  is an open neighborhood of  $u$  in  $Y$ . Moreover, the restriction

$$p \circ \psi|_{0 \times \mathbb{R}^n} : 0 \times V \rightarrow U_u$$

is a continuous and open bijection, and so it is a homeomorphism. Thus  $Y$  is locally homeomorphic with  $\mathbb{R}_+^n$  and the map  $p \circ \psi : \mathbb{R} \times V \rightarrow U_u$  is a trivialization of  $p$  over  $U_u$ , so  $p$  is a locally trivial fibration with fiber  $\mathbb{R}$ . Theorem 2.8 is completed.

#### 4. PRELIMINARIES

In this section we will assume that  $X$  is an  $(n+1)$ -dimensional manifold with  $\partial X = \emptyset$  and  $\Delta$  is a one-dimensional foliation on  $X$ .

Some statements in this section are well known for  $C^1$  foliations e.g. [30], and some of them are proved for  $C^0$  case but for the foliations on  $\mathbb{R}^2$ , see e.g. W. Kaplan [21]. However we did not find good exposition in the literature for general  $C^0$  foliations needed in our case and therefore short proofs will be presented. This will also make the paper self-contained.

It will be convenient to regard the graph of a function  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  as the following subset

$$\Gamma_f := \{(f(x), x) \mid x \in X\}$$

of  $\mathbb{R} \times X$ . Thus we switch the coordinates.

**Lemma 4.1.** *Let  $Z$  be a topological space,  $f_1, \dots, f_k : Z \rightarrow (a, b)$  be continuous functions such that  $f_i(z) < f_j(z)$  for all  $i < j$  and  $z \in Z$ , and*

$$\Gamma_i = \{(f_i(z), z) \mid z \in Z\} \subset [a, b] \times Z$$

*be the graph of  $f_i$ . Let also  $c_1 < c_2 < \dots < c_k \in (a, b)$  be any increasing  $k$ -tuple of numbers. Then there exists a self-homeomorphism  $h$  of  $[a, b] \times Z$  such that*

- (a)  *$h$  is fixed on  $a \times Z$  and  $b \times Z$ ;*
- (b)  *$h([a, b] \times z) = [a, b] \times z$  for all  $z \in Z$ ;*
- (c)  *$h(\Gamma_i) = c_i \times Z$ ;*
- (d) *if  $f_i(z) = c_i$  for some  $z \in Z$  and all  $i = 1, \dots, k$ , then  $h$  is fixed on  $[a, b] \times z$ .*

**Proof.** The proof follows from [24, Lemma 6.1.1], see also [26, Lemma 5.2.1]. Let us just mention that the situation can be reduced to the case  $[a, b] = [0, 1]$ , and that for  $k = 1$  the desired self-homeomorphism  $h$  of  $[0, 1] \times Z$  can be defined e.g. by

$$h(s, z) = \begin{cases} (s, z), & s \in \{0, 1\}, \\ (s^{\log_{f_1(z)} c_1}, z), & s \in (0, 1). \end{cases}$$

We leave the details for the reader, see Figure 4.1. □

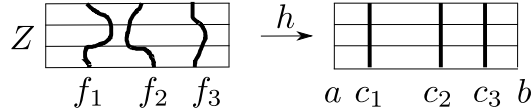


FIGURE 4.1.

**Lemma 4.2.** *Let  $W$  be an open neighborhood of 0 in  $\mathbb{R}^n$  and*

$$\gamma : W \rightarrow (a, b) \times \mathbb{R}^n$$

*be a cross section of the trivial one-dimensional foliation with*

$$\gamma(0) \in (a, b) \times 0.$$

*Then for each  $c \in (a, b)$  there exists an open embedding*

$$\psi : (a, b) \times W \subset (a, b) \times \mathbb{R}^n$$

*such that*

- (i)  *$\psi((a, b) \times x) = (a, b) \times \gamma(x)$  for all  $x \in W$ ;*
- (ii)  *$\psi(c, x) = \gamma(x)$  for all  $x \in W$ , i.e.  $\psi^{-1}(\gamma(W)) = c \times W$ ;*
- (iii) *if  $\gamma(0) = (c, 0)$ , then  $\psi(t, 0) = (t, 0)$  for all  $t \in (a, b)$ .*

**Proof.** Let  $\pi : (a, b) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  be the standard projection. Then the assumption that  $\gamma$  is a cross section means that the composition

$$\pi \circ \gamma : W \xrightarrow{\gamma} (a, b) \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}^n$$

is an injective map between open subsets of  $\mathbb{R}^n$ . Hence by Brouwer's theorem on domain invariance, e.g. [16],  $\pi \circ \gamma(W)$  is an open neighborhood of 0 in  $\mathbb{R}^n$ . Therefore we get an open embedding

$$\psi : (a, b) \times W \rightarrow (a, b) \times \mathbb{R}, \quad \psi(t, x) = (t, \pi \circ \gamma(x))$$

satisfying (i) and (iii). Then  $\psi^{-1}(\gamma(W)) \subset (a, b) \times W$  can be regarded as a graph of certain continuous function  $W \rightarrow (a, b)$ . Hence we get from Lemma 4.1 that  $\psi$  can be composed with a foliated homeomorphism of  $(a, b) \times W$  to satisfy (ii), that is to make  $\psi^{-1}(\gamma(W))$  being the graph of the constant function  $W \rightarrow c$ . Moreover, statements (b) and (d) of Lemma 4.1 allow to preserve properties (i) and (iii) respectively.  $\square$

**Lemma 4.3.** *Let  $\omega$  be a leaf of  $\Delta$ ,  $J_1, J_2 \subset \omega$  be two compact segments such that  $J_1 \cap J_2$  is a point,  $V$  be an open  $n$ -disk,  $\varepsilon > 0$ , and*

$$\psi_1 : (a - \varepsilon, b + \varepsilon) \times V \rightarrow X, \quad \psi_2 : (b - \varepsilon, c + \varepsilon) \times V \rightarrow X$$

*be two open foliated embeddings such that*

$$\psi_1([a, b] \times 0) = J_1, \quad \psi_2([b, c] \times 0) = J_2, \quad \psi_1(b, 0) = \psi_2(b, 0) = J_1 \cap J_2,$$

*and the union of the images of  $\psi_1$  and  $\psi_2$  does not contain compact leaves of  $\Delta$ . Then there exists an open neighborhood  $W$  of 0 in  $V$  and an open foliated embedding*

$$\psi : (a - \varepsilon, c + \varepsilon) \times W \rightarrow X$$

*such that  $\psi([a, c] \times 0) = J_1 \cup J_2$ , see Figure 4.2.*

**Proof.** Notice that the assumption that the union of the images of  $\psi_1$  and  $\psi_2$  does not contain compact leaves of  $\Delta$  implies that for any  $u, v \in V$  the union of the arcs

$$\psi_1((a - \varepsilon, b + \varepsilon) \times u), \quad \psi_2((b - \varepsilon, c + \varepsilon) \times v)$$

does not contain a non-trivial loop, so the intersection of these arcs is connected (though possibly empty).

Since  $\psi_1$  and  $\psi_2$  are open embeddings, there exist  $\delta > 0$  and a small open neighborhood  $W$  of 0 in  $V$  such that

$$\psi_2((b - \delta, b + \delta) \times W) \subset \text{image}(\psi_1).$$

Then we have an embedding  $\gamma : W \rightarrow V$  defined by  $\gamma(u) = \psi_1^{-1}(\psi_2(b, u))$ ,  $u \in W$ . Hence by Lemma 4.2 one can find an open foliated embedding

$$\bar{\psi}_1 : (a - \varepsilon, b + \varepsilon) \times W \rightarrow X$$

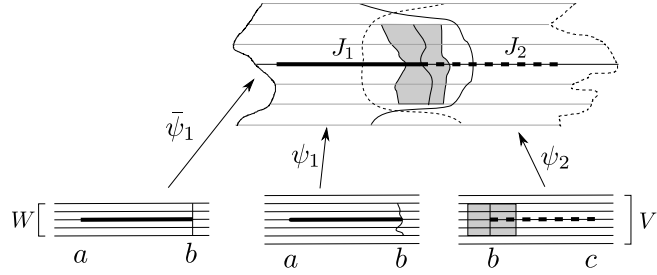


FIGURE 4.2.

such that

- $\bar{\psi}_1(t, 0) = \psi_1(t, 0)$  for all  $t \in (a - \varepsilon, b + \varepsilon)$ ;
- $\text{image}(\bar{\psi}_1) = \psi_1((a - \varepsilon, b + \varepsilon) \times W)$ ;
- $\pi \circ \bar{\psi}_1^{-1}(x) = \pi \circ \psi_2^{-1}(x)$  for all  $x \in \text{image}(\bar{\psi}_1) \cap \text{image}(\psi_2)$ ;
- $\bar{\psi}_1(b, u) = \psi_2(b, u)$  for all  $u \in W$ .

Now define the map  $\psi : (a - \varepsilon, c + \varepsilon) \times V \rightarrow X$  by

$$\psi(t, u) = \begin{cases} \bar{\psi}_1(t, u), & t \in (a - \varepsilon, b], \\ \psi_2(t, u), & t \in [b, c + \varepsilon). \end{cases}$$

One easily checks that  $\psi$  is an open foliated embedding which coincides with  $\psi_1$  on  $(a - \varepsilon, b] \times 0$  and with  $\psi_2$  on  $[b, c + \varepsilon) \times 0$ . In particular,  $\psi([a, c] \times 0) = J_1 \cup J_2$ .  $\square$

**Corollary 4.4.** *c.f. [30, Lemma 22] Let  $B^n$  be an open  $n$ -disk,  $\omega$  be a leaf of  $\Delta$ , and  $J \subset \omega$  be a compact segment. Then there exists an open foliated embedding  $\psi : (0, 3) \times B^n \rightarrow X$  such that  $\psi([1, 2] \times 0) = J$ .*

**Proof.** Let us show that *there exists an open set  $W$  such that  $J \subset W$  and  $W$  does not contain compact leaves of  $\Delta$* . Indeed, since  $\omega$  is either non-compact or is an embedded circle, it follows that  $J \neq \omega$ . Fix a point  $x \in \omega \setminus J$ . As  $X$  is a regular space, there exist a pair of disjoint open neighborhoods  $U_1 \ni x$  and  $U_2 \supset J$ . Denote  $W = U_2 \cap \mathbf{S}(U_1)$ . Then by Lemma 2.5  $W$  is open. Moreover,  $J \subset \omega = \mathbf{S}(x) \subset \mathbf{S}(U_1)$ , so  $J \subset W$ . Finally, since  $W \subset \mathbf{S}(U_1)$ , we see that  $\mathbf{S}(y) \cap U_1 \neq \emptyset$  for each  $y \in W$ , that is  $\mathbf{S}(y) \not\subset W$ . In other words,  $W$  does not contain any leaf of  $\Delta$ . In particular,  $W$  can not contain compact leaves.

Notice that  $J$  can be covered by finitely many foliated charts contained in  $W$ . Lemma 4.3 allows to replace two consecutive foliated charts with one. Hence the proof follows from that lemma by induction on the number of foliated charts covering  $J$ .  $\square$

**Cross sections.** The following two lemmas describe general properties of cross sections.

**Lemma 4.5.** *Let  $\psi : (a, b) \times B^n \rightarrow X$  be an open foliated embedding. Let also  $U = \psi((a, b) \times B^n)$ ,  $P_u = \psi((a, b) \times u)$ ,  $u \in B^n$ , be a plaque of  $\psi$ , and  $\gamma : V \rightarrow X$  be a cross section. Then the following statements hold true.*

- (1) *Suppose  $P_u \cap \gamma(V) \neq \emptyset$  for each  $u \in B^n$ . Then then for each  $s \in (a, b)$  the restriction map*

$$\psi|_{\{s\} \times B^n} : \{s\} \times B^n \rightarrow X \quad (4.2)$$

*is a cross section of  $\Delta$ .*

- (2) *Suppose  $\gamma(v) \in P_u$  for some  $u \in B^n$  and  $v \in V$ . Then there exists an open neighborhood  $V_v$  of  $v$  in  $V$  and an open neighborhood  $W_v$  of  $v$  in  $B^n$  such that*

- $\gamma(V_v) \subset \psi((a, b) \times W_v)$ ;
- $P_w \cap \gamma(V_v) \neq \emptyset$  for each  $w \in W_v$ .

*In particular, the restriction  $\psi|_{s \times W_v} : s \times W_v \rightarrow X$  is a cross sections of  $\Delta$ .*

- (3) *For every  $x \in \mathbf{S}(\gamma(V))$  there exist an open subset  $W$  of  $\mathbb{R}^n$  and a cross-section  $\psi_x : W \rightarrow X$  such that  $x \in \psi_x(W) \subset \mathbf{S}(\gamma(V))$ .*

**Proof.** (1) Suppose  $P_u \cap \gamma(V) \neq \emptyset$  for all  $u \in B^n$ . Since  $\gamma(V)$  intersects each leaf of  $\Delta$  in at most one point, it follows that distinct plaques  $P_u$  and  $P_v$  for  $u \neq v \in B^n$  belong to distinct leaves of  $\Delta$ . As  $B^n$  is an open subset of  $\mathbb{R}^n$ , the map (4.2) is a cross section for each  $s \in (a, b)$ .

- (2) Consider the following composition map:

$$\xi = \pi \circ \psi \circ \gamma|_{\gamma^{-1}(U)} : \gamma^{-1}(U) \xrightarrow{\gamma} U \xrightarrow{\psi} (a, b) \times B^n \xrightarrow{\pi} B^n, \quad (4.3)$$

where  $\pi$  is the standard projection to the second coordinate.

Then the assumption  $\gamma(v) \in P_u$  for some  $u \in B^n$  and  $v \in V$  implies that  $v \in \gamma^{-1}(U)$  and  $\xi(v) = u$ .

Since the images of distinct points of  $V$  under  $\gamma$  are contained in distinct leaves of  $\Delta$ , they also belong to distinct plaques of  $\psi$ , whence  $\xi$  is an injective continuous map between open subsets of  $\mathbb{R}^n$ . Hence, by Brouwer theorem on domain invariance  $\xi$  is an open map, [7]. In particular,  $\xi$  yields a homeomorphism of some open neighborhood  $V_v$  of  $v$  onto some open neighborhood  $W_u$  of  $u$  in  $B^n$ . This implies that  $\gamma(V_v) \subset \psi((a, b) \times W_u)$  and  $P_w \cap \gamma(V_v) \neq \emptyset$  for each  $w \in W_u$ .

- (3) Let  $\omega$  be the leaf containing  $x$  and  $y = \gamma(v) = \omega \cap \gamma(V)$ . If  $x = y$ , then one can put  $W_x = V$  and  $\gamma_x = \gamma$ .

Therefore suppose  $x \neq y$ . Let  $J \subset \omega$  be a closed segment with ends  $x$  and  $y$ . Then by Corollary 4.4 there exists an open foliated embedding  $\psi : (0, 3) \times B^n \rightarrow X$  such that  $\psi([1, 2] \times 0) = J$ ,  $\psi(1, 0) = x$  and  $\psi(2, 0) = y$ .

Thus  $y = \gamma(v) = \psi(2, 0) \in P_0 = \psi((0, 3) \times 0)$ , and so by (2) there exists a neighborhood  $W$  of 0 in  $B^n$  such that the map  $\psi_x : W \rightarrow X$  defined by  $\psi_x(w) = \psi(1, w)$  is a cross section with  $\psi_x(W) \subset \mathbf{S}(\gamma(V))$ . It remains to note that  $\psi_x(0) = \psi(1, 0) = x$ .  $\square$

**Lemma 4.6.** *Let  $\omega_0$  be a leaf of  $\Delta$ . Suppose that for each leaf  $\omega$  of  $\Delta$  contained in  $\mathbf{S}(\overline{\omega_0})$  there exists a cross section  $\gamma$  passing through  $\omega$ . Then  $\omega_0$  is properly embedded, i.e. it satisfies conditions (e) and (c) of Lemma 2.4.*

**Proof.** If  $\omega_0$  is compact, then it is necessarily properly embedded. Therefore assume that  $\omega_0$  is non-compact.

(e) Let  $\omega \subset \mathbf{S}(\overline{\omega_0})$  be a leaf of  $\Delta$ . By (3) of Lemma 4.5 for each  $x \in \omega$  there exists an open foliated embedding  $\psi : (-1, 1) \times B^n \rightarrow X$  such that  $\psi(0, 0) = x$  and different plaques of  $\psi$  are contained in different leaves of  $\Delta$ . In particular,  $\psi$  homeomorphically maps  $(-1, 1) \times \{0\}$  onto an open neighbourhood of  $x$  in  $\omega$ . This implies that  $\omega$  is an embedded 1-submanifold of  $X$ .

(c) Let  $x \in \mathbf{S}(\overline{\omega_0}) \setminus \omega_0$ . Then decreasing  $B^n$  one can assume that the image of  $\psi$  does not intersect  $\omega_0$ , whence  $x \notin \overline{\omega_0}$ . From arbitrariness of  $x \in \mathbf{S}(\overline{\omega_0})$  we conclude that  $\omega_0$  is closed in  $X$ .  $\square$

**Parallel cross sections.** Let  $\gamma : V \rightarrow X$  be a cross section and  $W \subset V$  be an open subset. Then a cross section  $\delta : W \rightarrow X$  *parametrically agrees* with  $\gamma$ , whenever for each  $u \in W$  the points  $\delta(u)$  and  $\gamma(u)$  belong to the same leaf. Also  $\delta$  is *parallel to  $\gamma$*  if it parametrically agrees with  $\gamma$  and  $\delta(W) \cap \gamma(W) = \emptyset$ .

Let  $\gamma_0, \gamma_1 : V \rightarrow X$  be two parallel cross sections intersecting only non-compact leaves. For each  $u \in V$  let  $\omega_u$  be the leaf containing  $\gamma_0(u)$  and  $\gamma_1(u)$ ,  $I_u \subset \omega_u$  be the compact segment with ends  $\gamma_0(u)$  and  $\gamma_1(u)$ , and  $\text{Int } I_u$  be the interior of  $I_u$ . In this situation we will put:

$$L(\gamma_0, \gamma_1) := \bigcup_{u \in V} \text{Int } I_u, \quad K(\gamma_0, \gamma_1) := \bigcup_{u \in V} I_u. \quad (4.4)$$

**Lemma 4.7.** *There exists a homeomorphism  $\psi : [0, 1] \times V \rightarrow K(\gamma_0, \gamma_1)$  such that*

$$\psi([0, 1] \times u) = I_u, \quad \psi(0, u) = \gamma_0(u), \quad \psi(1, u) = \gamma_1(u)$$

for every  $u \in V$ , see Figure 4.3. In particular,  $\psi((0, 1) \times V) = L(\gamma_0, \gamma_1)$ . Moreover,  $L(\gamma_0, \gamma_1)$  is open in  $X$ .

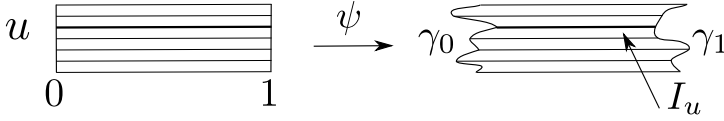


FIGURE 4.3.

**Proof.** Fix some  $\varepsilon > 0$  and denote  $J = (-\varepsilon, 1 + \varepsilon)$ . Then it follows from Corollary 4.4 and Lemma 4.2 that for each  $u \in V$  there exists a neighborhood  $W_u$  in  $V$  and an open foliated embedding  $\psi_u : J \times W_u \rightarrow X$  having the following properties:

- (a)  $\psi_u([0, 1] \times u) = I_u$ ,  $\psi_u(0, u) = \gamma_0(u)$ , and  $\psi_u(1, u) = \gamma_1(u)$ ;
- (b)  $\psi_u(J \times v)$ ,  $\gamma_0(v)$ , and therefore  $\gamma_1(v)$ , are contained in the same leaf of  $\Delta$  for each  $v \in W_u$ ;
- (c)  $\gamma_0(W_u) = 0 \times W_u$  and  $\gamma_1(W_u) = 1 \times W_u$ .

In particular, this implies that the set

$$L(\gamma_0, \gamma_1) = \bigcup_{x \in V} \psi_u((0, 1) \times W_u)$$

is open in  $X$ .

As  $V$  is paracompact, there is a locally finite cover  $\{W_i\}_{i \in \Lambda}$  of  $V$  and for each  $i \in \Lambda$  an open foliated embedding  $\psi_i : J \times W_i \rightarrow X$  such that  $\psi_i([0, 1] \times u) = I_u$  for all  $u \in W_i$ . Denote  $U_i = \psi_i(J \times W_i)$  and  $U = \bigcup_{i \in \Lambda} U_i$ . Then  $U$  is an open neighborhood of  $K(\gamma_0, \gamma_1)$  and  $\{U_i\}_{i \in \Lambda}$  is a locally finite cover of  $U$ .

Let  $\{\lambda_i : V \rightarrow [0, 1]\}_{i \in \Lambda}$  be a partition of unity subordinated to the cover  $\{W_i\}_{i \in \Lambda}$ . Thus  $\text{supp}(\lambda_i) \subset W_i$  and  $\sum_{i \in \Lambda} \lambda_i(u) = 1$ . Let also

$$p_i : J \times W_i \rightarrow J, \quad q_i : J \times W_i \rightarrow W_i$$

be the standard projections, and

$$\mu_i = \lambda_i \circ q_i \circ \psi_i^{-1} : U_i \xrightarrow{\psi_i^{-1}} J \times W_i \xrightarrow{q_i} W_i \xrightarrow{\lambda_i} [0, 1].$$

Then  $\text{supp}(\mu_i) = J \times \text{supp}(\lambda_i)$ , whence  $\mu_i$  extends by zero to a continuous function on all of  $U$ .

Let  $f : U \rightarrow J$  be the function defined by the following rule:

$$f(x) = \sum_{x \in U_i} \mu_i(x) \cdot p_i \circ \psi_i^{-1}(x).$$

Since for each  $u \in W_i$  the function  $p_i \circ \psi_i^{-1} : I_u \rightarrow [0, 1]$  is homeomorphism which maps  $\gamma_0(u)$  and  $\gamma_1(u)$  to 0 and 1 respectively, and  $\sum_{j \in \Lambda} \mu_j \equiv 1$ , we see that the restriction  $f|_{I_u}$  is a convex linear combination of orientation



preserving homeomorphisms. Therefore  $f|_{I_u} : I_u \rightarrow [0, 1]$  is a homeomorphism as well.

Let also  $g : U \rightarrow V$  be the map defined by  $g(x) = q_i(x)$  whenever  $x \in U_i$ . Due to (b) this definition does not depend on a particular  $U_i$  containing  $x$ . Hence  $g$  is a well-defined continuous map.

Then the mapping

$$\phi = (f, g) : K(\gamma_0, \gamma_1) \rightarrow [0, 1] \times V$$

is a continuous bijection being also a local homeomorphism, and so it is a homeomorphism. Moreover,  $\phi(I_u) = [0, 1] \times u$  for all  $u \in V$ . Therefore  $\psi = \phi^{-1}$  is the required homeomorphism.  $\square$

**Lemma 4.8.** *Let  $\gamma_i : V \rightarrow X$ ,  $i \in \mathbb{Z}$ , be a family of pairwise parallel cross sections intersecting only non-compact leaves and  $U = \mathbf{S}(\gamma_i(V))$  be the common saturation of their images. Suppose also that the following two conditions hold:*

- (1)  $L(\gamma_i, \gamma_{i+1}) \cap L(\gamma_j, \gamma_{j+1}) = \emptyset$  for  $i \neq j$ ;
- (2)  $\bigcup_{i=-\infty}^{\infty} K(\gamma_i, \gamma_{i+1}) = U$ .

*Then  $U$  is open in  $X$  and foliated homeomorphic with  $\mathbb{R} \times V$ .*

**Proof.** By Lemma 4.7 for each  $i \in \mathbb{Z}$  there exists a homeomorphism

$$\psi_i : [i, i + 1] \times V \rightarrow K(\gamma_i, \gamma_{i+1})$$

such that for each  $u \in V$

- $\psi_i([i, i + 1] \times u)$  is a segment of the leaf of  $\Delta$  between the points  $\gamma_i(u)$  and  $\gamma_{i+1}(u)$ ;
- $\psi_{i-1}(i, u) = \psi_i(i, u) = \gamma_i(u)$ .

Therefore we have a homeomorphism

$$\psi : \mathbb{R} \times V \longrightarrow \bigcup_{i=-\infty}^{\infty} K(\gamma_i, \gamma_{i+1}) = U$$

defined by  $\psi(t, u) = \psi_i(t, u)$  whenever  $t \in [i, i + 1]$  and  $u \in V$ . Moreover,  $U = \bigcup_{i=1}^{\infty} L(\gamma_{-i}, \gamma_i)$  is open in  $X$ .  $\square$

## 5. PROOF OF THEOREM 2.14

Let  $\gamma : V \rightarrow X$  be a cross section intersecting only leaves being simultaneously non-compact, properly embedded, and non-special. We have to prove that its saturation  $\mathbf{S}(\gamma(V))$  is open and foliated homeomorphic with  $\mathbb{R} \times V$ .

First we will assume that  $\partial X = \emptyset$ . The proof of the case  $\partial X \neq \emptyset$  will follow from the case  $\partial X = \emptyset$  by passing to the double  $2X$  of  $X$  and

considering the one-dimensional foliation on  $2X$  induced by  $\Delta$ . It will be given at the end of this section.

Our proof is based on the following statement which will be proved below.

**Proposition 5.1.** *Let  $K \subset X$  be a compact subset. Then one can find two parallel cross sections  $\alpha, \beta : V \rightarrow X$  parametrically agreeing with  $\gamma$  and satisfying*

$$\mathbf{S}(\gamma(V)) \cap K \subset L(\alpha, \beta).$$

Moreover, if  $\mathbf{A}, \mathbf{B} : V \rightarrow X$  are two parallel cross sections parametrically agreeing with  $\gamma$ , then one can assume that

$$(\mathbf{S}(\gamma(V)) \cap K) \cup K(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \subset L(\alpha, \beta).$$

Before proving Theorem 2.14 let us deduce it from Proposition 5.1.

Fix any increasing sequence  $K_1 \subset K_2 \subset \dots$  of compact subsets of  $X$  such that  $X = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} K_i$ . Using Proposition 5.1 one constructs a family of parallel cross sections  $\alpha_i, \beta_i : V \rightarrow X$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , parametrically agreeing with  $\gamma$  and such that

- (1)  $\mathbf{S}(\gamma(V)) \cap K_i \subset L(\alpha_i, \beta_i)$ ;
- (2)  $K(\alpha_{i-1}, \beta_{i-1}) \subset L(\alpha_i, \beta_i)$  for all  $i \geq 2$ .

Hence

$$\mathbf{S}(\gamma(V)) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathbf{S}(\gamma(V)) \cap K_i = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} L(\alpha_i, \beta_i).$$

Exchanging  $\alpha_i$  and  $\beta_i$  if necessary and re-denoting them as follows:  $\gamma_{-i} = \alpha_i$ , and  $\gamma_{i-1} = \beta_i$  for  $i \in \mathbb{N}$ , one can assume that the sequence of cross sections  $\{\gamma_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  satisfies assumptions of Lemma 4.8, see Figure 5.4. Hence  $\mathbf{S}(\gamma(V))$  is open and foliated homeomorphic with  $\mathbb{R} \times V$ . This proves Theorem 2.14 modulo Proposition 5.1.

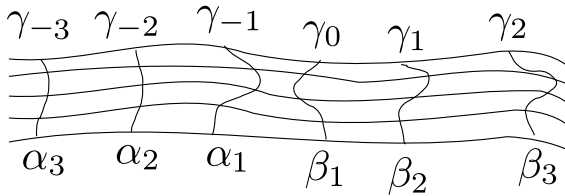


FIGURE 5.4.

The following lemma guarantees existence of local cross sections in Proposition 5.1.

**Lemma 5.2.** *Let  $K \subset X$  be a compact subset. Then for each  $u \in V$  one can find an open neighborhood  $W$  in  $V$  and two parallel cross sections  $\alpha, \beta : W \rightarrow X$  parametrically agreeing with  $\gamma$  and such that*

$$\mathbf{S}(\gamma(W)) \cap K \subset L(\alpha, \beta).$$

**Proof.** Suppose that lemma fails, so there exists  $u \in V$  belonging to some leaf  $\omega$  such that for

- any decreasing sequence  $W_i$  of neighborhoods of  $u$  in  $V$  satisfying

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} W_i = \{u\},$$

- and any family of pairs of parallel cross sections  $\alpha_i, \beta_i : W_i \rightarrow X$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , parametrically agreeing with  $\gamma$

the set

$$\mathbf{S}(\gamma(W_i)) \setminus L(\alpha_i, \beta_i)$$

contains some point  $x_i \in K$ . Denote

$$U = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} L(\alpha_i, \beta_i).$$

Then one can assume, in addition, that the following properties hold:

- (a) the sequence  $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  converges to some point  $x \in K$ ;
- (b)  $\omega \subset U$ ;
- (c)  $x_i \notin U$  for all  $i \in \mathbb{N}$ , whence  $x \notin U$  as well, and so  $x \notin \omega$ .

Indeed, (a) follows from compactness of  $K$ .

To prove (b) fix any continuous bijection  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \omega$ . By assumption  $\phi$  is proper, so one can find  $A > 0$  such that  $\omega \cap K \subset \phi(-A, A)$ . Choose  $\alpha_i$  and  $\beta_i$  so that  $\alpha_i(W_i) \cap K = \beta_i(W_i) \cap K = \emptyset$ ,

$$\begin{aligned} \cdots < \alpha_{i+1}(u) < \alpha_i(u) < \cdots < \alpha_1(u) < -A < \\ < A < \beta_1(u) < \cdots < \beta_i(u) < \beta_{i+1}(u) < \cdots \end{aligned}$$

$\lim_{i \rightarrow +\infty} \alpha_i(u) = -\infty$ , and  $\lim_{i \rightarrow +\infty} \beta_i(u) = +\infty$ . Then we will have that  $\omega \subset U$ .

Finally, to satisfy (c) choose  $W_{i+1}$  so small that  $x_i \notin \mathbf{S}(\gamma(W_{i+1}))$  for all  $i \in \mathbb{N}$ .

Now let  $\omega_i$  be the leaf of  $\Delta$  containing  $x_i$ , and  $y_i = \omega_i \cap \gamma(W_1)$ . Then the sequence  $\{y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  converges to  $y = \gamma(u) \in \omega$ . Hence  $p(x) \neq p(y) = p(\omega)$ , while  $p(x_i) = p(y_i) = p(\omega_i)$  for all  $i \in \mathbb{N}$ . Therefore by Lemma 2.6  $\omega$  is a special leaf which contradicts to the assumption.  $\square$

The rest of the proof of Theorem 2.14 is based on E. Michael's result about selections, [31].

Let  $2^X$  be the set of all subsets of  $X$  and  $\mathcal{E}(X) \subset 2^X$  be the set of all closed subsets of  $X$ . Let also  $A \subset V$  be a subset and  $q : V \rightrightarrows X$  be

a multivalued map, i.e. a map  $q : V \rightarrow 2^X$ . Then a *selection* for the restriction  $q|_A$  is a continuous map  $\phi : A \rightarrow X$  such that  $\phi(x) \in q(x)$  for all  $x \in A$ .

A multivalued map  $q : V \rightrightarrows X$  is called *lower semi-continuous* whenever for each open  $U \subset X$  the set

$$T_U := \{x \in V \mid q(x) \cap U \neq \emptyset\}$$

is open in  $V$ .

A family  $\mathcal{Z} \subset 2^X$  is called *equi- $LC^k$* ,  $k \geq 0$ , if for every  $P \in \mathcal{Z}$ ,  $x \in P$ , and a neighborhood  $U_x$  of  $x$  in  $X$ , there exists a neighborhood  $O_x$  of  $x$  in  $X$  such that for every  $Q \in \mathcal{Z}$  every continuous map  $f : S^m \rightarrow Q \cap O_x$  of an  $m$ -sphere ( $m \leq k$ ) is homotopic to a constant map in  $Q \cap O_x$ .

A topological space  $Z$  is called  *$C^k$* , or  *$k$ -connected*,  $k \geq 0$ , if every continuous map  $f : S^m \rightarrow Z$  of an  $m$ -sphere ( $m \leq k$ ) is homotopic to a constant map.

**Theorem 5.3.** [31, Theorem 1.2] *Let  $V$  be a separable metric space,  $A \subset V$  be a closed subset with  $\dim(V \setminus A) \leq k + 1$ ,  $X$  a complete metric space,  $\mathcal{Z} \subset \mathcal{E}(X)$  be equi- $LC^k$  and  $q : V \rightarrow \mathcal{Z}$  be a lower semi-continuous map. Then every selection for  $q|_A$  can be extended to a selection for  $q|_U$  for some open  $U \supset A$ . If also every  $S \subset \mathcal{Z}$  is  $C^k$ , then one can take  $U = X$ .*

We will use the following particular case of Theorem 5.3.

**Corollary 5.4.** *Let  $V$  be a separable metric space,  $\dim V = n$ ,  $X$  be a complete metric space, and  $\mathcal{Z} \subset \mathcal{E}(X)$  be an equi- $LC^{n+1}$  family such that each  $Q \in \mathcal{Z}$  is contractible. Then every lower semi-continuous multivalued map  $q : V \rightarrow \mathcal{Z}$  has a continuous selection.*

**Proof of Proposition 5.1.** Since  $V$  is paracompact, it follows from Lemma 5.2 that there exist

- a locally finite open cover  $\mathcal{W} = \{W_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  of  $V$  with compact closures  $\overline{W}_i$ ,
- and a family of pairs of parallel cross sections  $\alpha_i, \beta_i : W_i \rightarrow X$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , parametrically agreeing with  $\gamma$

such that

$$\mathbf{S}(\gamma(W_i)) \cap K_i \subset L(\alpha_i, \beta_i),$$

where  $K_i := K \cup \mathbf{A}(\overline{W}_i) \cup \mathbf{B}(\overline{W}_i)$  if the cross sections  $\mathbf{A}, \mathbf{B} : V \rightarrow X$  are given, and  $K_i := K$  otherwise.

Then it follows from Lemmas 4.7 and 4.1 that for each  $i \in \mathbb{N}$  one can find an embedding  $\psi_i : [-1, 1] \times W_i \rightarrow X$  such that for each  $u \in V$

- (1)  $\psi_i([-1, 1] \times u)$  is contained in the leaf of  $\Delta$ ;
- (2)  $\psi_i(-1, u) = \alpha_i(u)$ ,  $\psi_i(0, u) = \gamma(u)$ ,  $\psi_i(1, u) = \beta_i(u)$ ;

- (3)  $\mathbf{S}(\gamma(W_i)) \cap K_i \subset \psi_i((-1, 1) \times W_i)$ ;  
 (4)  $\alpha_i(W_i)$  are contained in the same path component of  $\mathbf{S}(\gamma(V)) \setminus \gamma(V)$  for all  $i \in \mathbb{N}$ .

Let  $u \in V$ ,  $\omega_u$  be the leaf of  $\Delta$  containing  $\gamma(u)$ , and  $\phi_u : \mathbb{R} \rightarrow \omega_u$  be any bijection satisfying  $\phi_u^{-1}(\alpha_i(u)) < 0$ , and  $\phi_x(0) = \gamma(u)$ . Therefore  $\phi_u^{-1}(\beta_i(x)) > 0$  for all  $i$  such that  $u \in W_i$ . Then there are two numbers  $a_u, b_u$  such that

$$\omega_u \setminus \bigcap_{i : u \in W_i} L(\alpha_i, \beta_i).$$

consists of two half closed intervals

$$A_u = \phi_u(-\infty, a_u], \quad B_u = \phi_u[b_u, +\infty).$$

Since  $\omega_u$  is a properly embedded leaf, it follows that  $A_u$  and  $B_u$  are closed in  $X$ . Moreover, by (3) they do not intersect  $K$ .

Define the following two maps  $a, b : V \rightarrow \mathcal{E}(X)$ , i.e. multivalued mappings  $a, b : V \rightrightarrows X$  with closed images, by

$$a(u) = A_u, \quad b(u) = B_u$$

for  $u \in V$ .

**Lemma 5.5.** (i) *The maps  $a$  and  $b$  are lower semi-continuous.*

(ii) *The families  $\mathcal{A} = \{A_u \mid u \in V\}$  and  $\mathcal{B} = \{B_u \mid u \in V\}$  are equi- $LC^k$  for all  $k \geq 0$ .*

**Proof.** It suffices to check (i) and (ii) for  $a$  only.

(i) We should check that for each open  $U \subset X$  the set

$$T_U = \{u \in V \mid a(u) \cap U \neq \emptyset\}$$

is open as well.

Let  $u \in V$  be such that  $A_u \cap U \neq \emptyset$ , and  $x \in A_u \cap U$ . Since  $U$  is open, one can assume that  $x$  is not the end of  $A_u$ , that is  $\phi_u^{-1}(x) < a_u$ .

By assumption  $u \in W_i$  for some  $i \in \mathbb{N}$ . Then by Corollary 4.4 for the closed interval on  $\omega_u$  between  $x$  and  $\phi_u(a_u)$  there exists an open neighborhood  $O$  of  $u$  in  $W_i$  and an open foliated embedding

$$\psi : (-1, 2) \times O \rightarrow X$$

such that

- (a)  $\psi((-1, 2) \times O) \subset U$ ;
- (b)  $\psi(0, u) = x$ ;
- (c)  $\psi((-1, 2) \times v) \subset \omega_v$ ;
- (d)  $\psi(1, v) = \alpha_i(v)$ .

It follows from (a) and (d) that  $\psi((-1, 1] \times v) \subset A_v \cap U$ , whence  $O \subset T_U$ . Thus  $T_U$  is open, and so  $a$  is a lower semi-continuous multivalued map.

(ii) Notice that for each  $x \in X$  there exists an open neighborhood  $U_x$  such that the intersection of  $U_x$  with each leaf  $\omega$  is either empty or homeomorphic to an open interval. Therefore intersection of  $U_x$  with each set  $A_u$  is either empty or homeomorphic to  $(0, 1)$  or to  $(0, 1]$ . In the latter two cases  $U_x \cap A_u$  is contractible. Hence every continuous map  $S^k \rightarrow U_x \cap A_u$  is null homotopic and one can put  $O_y = U_y$ . This means that  $\mathcal{A}$  is equi- $LC^k$  for all  $k \geq 0$ .  $\square$

Since for each  $u \in V$  the sets  $A_u$  and  $B_u$  are contractible, it follows from Lemma 5.5 that  $a$  and  $b$  satisfy assumptions of Corollary 5.4. Hence they admit continuous selections  $\alpha, \beta : V \rightarrow X$  and these selections are the required cross sections. This completes Proposition 5.1.

**Proof of Theorem 2.14. Case  $\partial X \neq \emptyset$ .** We need the following simple lemma whose proof we leave for the reader.

**Lemma 5.6.** *Let  $\xi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  be the involution defined by*

$$\xi(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = (x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n).$$

*Then for each subset  $V \subset \mathbb{R}_+^n$  open in the induced topology of  $\mathbb{R}_+^n$ , its **double**  $\widehat{V} = V \cup \xi(V)$  is open in  $\mathbb{R}^n$ .*  $\square$

Now let

$$\widehat{X} = X_1 \underset{\text{id}: \partial X_1 \rightarrow \partial X_2}{\sqcup} X_2$$

be the double of  $X$ , i.e. the union of two copies  $X_1$  and  $X_2$  of  $X$  glued along their boundaries by the identity map. Let also  $\sigma : \widehat{X} \rightarrow \widehat{X}$  be the involution interchanging  $X_1$  and  $X_2$  by the identity map.

Then the foliation  $\Delta$  on each of the copies of  $X$  gives a one-dimensional foliation  $\widehat{\Delta}$  on  $\widehat{X}$ . Moreover, let  $\widehat{V}$  be the double of  $V$  as in Lemma 5.6. Then  $\widehat{V}$  is open in  $\mathbb{R}^n$  and the cross section  $\gamma$  naturally extends to the cross section  $\widehat{\gamma} : \widehat{V} \rightarrow \widehat{X}$  of  $\widehat{\Delta}$  such that  $\widehat{\gamma}|_V = \gamma$  and  $\sigma \circ \widehat{\gamma} = \widehat{\gamma} \circ \xi$ .

Since  $\partial \widehat{X} = \emptyset$ , it follows from the boundaryless case of Theorem 2.14 that the saturation  $\mathbf{S}(\widehat{\gamma}(\widehat{V}))$  is open in  $\widehat{X}$  and foliated homeomorphic with  $\mathbb{R} \times \widehat{V}$ . That homeomorphism induces a homeomorphism of the open subset

$$\mathbf{S}(\gamma(V)) = \mathbf{S}(\widehat{\gamma}(\widehat{V})) \cap X_1$$

of  $X_1$  onto  $\mathbb{R} \times V$ . Theorem 2.14 is completed.

## 6. ACKNOWLEDGMENTS

The authors are sincerely grateful to Olena Karlova for pointing out to Katetov-Tong theorem about characterization of normal spaces which leads us to the proof of Theorem 2.14 using E. Michael selection theorem.

## REFERENCES

- [1] John L. Bailey. A class of decompositions of  $E^n$  which are factors of  $E^{n+1}$ . *Trans. Amer. Math. Soc.*, 148:561–575, 1970.
- [2] R. H. Bing. The cartesian product of a certain non-manifold and a line is  $E_4$ . *Bull. Amer. Math. Soc.*, 64:82–84, 1958.
- [3] R. H. Bing. The cartesian product of a certain nonmanifold and a line is  $E^4$ . *Ann. of Math. (2)*, 70:399–412, 1959.
- [4] A. V. Bolsinov, A. T. Fomenko. *Vvedenie v topologiyu integriruemyykh gamiltonovykh sistem (Introduction to the topology of integrable Hamiltonian systems)*. “Nauka”, Moscow, 1997.
- [5] William M. Boothby. The topology of regular curve families with multiple saddle points. *Amer. J. Math.*, 73:405–438, 1951.
- [6] William M. Boothby. The topology of the level curves of harmonic functions with critical points. *Amer. J. Math.*, 73:512–538, 1951.
- [7] L.E.J. Brouwer. Beweis der invarianz des  $n$ -dimensionalen gebiets. *Mathematische Annalen*, 71:305–315, 1912.
- [8] Alberto Candel, Lawrence Conlon. *Foliations. I*. Graduate Studies in Mathematics 23. American Mathematical Society, 2000.
- [9] E. Dyer, M.-E. Hamstrom. Completely regular mappings. *Fund. Math.*, 45:103–118, 1958.
- [10] C. Godbillon, G. Reeb. Fibrés sur le branchement simple. *Enseignement Math. (2)*, 12:277–287, 1966.
- [11] Claude Godbillon. Feuilletages ayant la propriété du prolongement des homotopies. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 17(fasc. 2):219–260 (1968), 1967.
- [12] Claude Godbillon. *Feuilletages*, volume 98 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1991. Études géométriques. [Geometric studies], With a preface by G. Reeb.
- [13] André Haefliger. Sur les feuilletages des variétés de dimension  $n$  par des feuilles fermées de dimension  $n - 1$ . In *Colloque de topologie de Strasbourg, 1954–1955*, page 8. Institut de Mathématique, Université de Strasbourg.
- [14] André Haefliger, Georges Reeb. Variétés (non séparées) à une dimension et structures feuilletées du plan. *Enseignement Math. (2)*, 3:107–125, 1957.
- [15] J. Harrison.  $C^2$  counterexamples to the Seifert conjecture. *Topology*, 27(3):249–278, 1988.
- [16] Witold Hurewicz, Henry Wallman. *Dimension Theory*. Princeton Mathematical Series, v. 4. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1941.
- [17] James Jenkins, Marston Morse. Contour equivalent pseudoharmonic functions and pseudoconjugates. *Amer. J. Math.*, 74:23–51, 1952.
- [18] James Jenkins, Marston Morse. Conjugate nets, conformal structure, and interior transformations on open Riemann surfaces. *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, 39:1261–1268, 1953.

- [19] James Jenkins, Marston Morse. Curve families  $F^*$  locally the level curves of a pseudo-harmonic function. *Acta Math.*, 91:1–42, 1954.
- [20] James Jenkins, Marston Morse. Conjugate nets on an open Riemann surface. In *Lectures on functions of a complex variable*, pages 123–185. The University of Michigan Press, Ann Arbor, 1955.
- [21] Wilfred Kaplan. Regular curve-families filling the plane, I. *Duke Math. J.*, 7:154–185, 1940.
- [22] Wilfred Kaplan. Regular curve-families filling the plane, II. *Duke Math. J.*, 8:11–46, 1941.
- [23] Jehpill Kim. On  $(n-1)$ -dimensional factors of  $I^n$ . *Proc. Amer. Math. Soc.*, 15:679–680, 1964.
- [24] Sergiy Maksymenko. Stabilizers and orbits of smooth functions. *Bull. Sci. Math.*, 130(4):279–311, 2006.
- [25] Sergiy Maksymenko, Eugene Polulyakh. Foliations with non-compact leaves on surfaces. *Proceedings of Geometric Center*, 8(3–4):17–30, 2015.
- [26] Sergiy Maksymenko, Eugene Polulyakh. Foliations with all non-closed leaves on non-compact surfaces. *Methods Funct. Anal. Topology*, 22(3):266–282, 2016.
- [27] Shigenori Matsumoto. Affine flows on 3-manifolds. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 162(771):vi+94, 2003.
- [28] Louis F. McAuley. Completely regular mappings, fiber spaces, the weak bundle properties, and the generalized slicing structure properties. In *Topology Seminar (Wisconsin, 1965)*, pages 219–227. Ann. of Math. Studies, No. 60, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1966.
- [29] Gaël Meigniez. Prolongement des homotopies,  $Q$ -variétés et cycles tangents. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 47(3):945–965, 1997.
- [30] Gaël Meigniez. Submersions, fibrations and bundles. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 354(9):3771–3787 (electronic), 2002.
- [31] Ernest Michael. Continuous selections. II. *Ann. of Math. (2)*, 64:562–580, 1956.
- [32] M. Morse. La construction topologique d'un réseau isotherme sur une surface ouverte. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 35:67–75, 1956.
- [33] Marston Morse. The existence of pseudoconjugates on Riemann surfaces. *Fund. Math.*, 39:269–287 (1953), 1952.
- [34] A. A. Oshemkov. Morse functions on two-dimensional surfaces. Coding of singularities. *Trudy Mat. Inst. Steklov.*, 205(Novye Rezult. v Teor. Topol. Klassif. Integr. Sistem):131–140, 1994.
- [35] Eugene Polulyakh. Kronrod-reeb graphs of functions on non-compact surfaces. *Ukrainian Math. Journal*, 67(3):375–396, 2015.
- [36] Eugene Polulyakh, Iryna Yurchuk. On the pseudo-harmonic functions defined on a disk. *Pr. Inst. Mat. Nats. Akad. Nauk Ukr. Mat. Zastos.*, 80:151, 2009.
- [37] Georges Reeb. Les espaces localement numériques non séparés et leurs applications à un problème classique. In *Colloque de topologie de Strasbourg, 1954–1955*, page 12. Institut de Mathématique, Université de Strasbourg.
- [38] Ronald H. Rosen.  $E^4$  is the cartesian product of a totally non-euclidean space and  $E^1$ . *Ann. of Math. (2)*, 73:349–361, 1961.
- [39] Leonard R. Rubin. A general class of factors of  $E^4$ . *Trans. Amer. Math. Soc.*, 166:215–224, 1972.
- [40] Stephen B. Seidman. Completely regular mappings with locally compact fiber. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 147:461–471, 1970.



- [41] V. V. Sharko. Smooth and topological equivalence of functions on surfaces. *Ukrain. Mat. Zh.*, 55(5):687–700, 2003.
- [42] V. V. Sharko. Smooth functions on non-compact surfaces. *Pr. Inst. Mat. Nats. Akad. Nauk Ukr. Mat. Zastos.*, 3(3):443–473, arXiv:math/0709.2511, 2006.
- [43] V. V. Sharko, Yu. Yu. Soroka. Topological equivalence to a projection. *Methods Funct. Anal. Topology*, 21(1):3–5, 2015.
- [44] Yuliya Soroka. Homeotopy groups of rooted tree like non-singular foliations on the plane. *Methods Funct. Anal. Topology*, 22(3):283–294, 2016.
- [45] I. Tamura. *Topologiya sloenii*. “Mir”, Moscow, 1979. Translated from the Japanese by A. A. Bel’skiĭ.
- [46] Hassler Whitney. Regular families of curves. *Ann. of Math. (2)*, 34(2):244–270, 1933.
- [47] Hassler Whitney. On regular families of curves. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 47:145–147, 1941.

*Received: February 2, 2016, accepted: March 20, 2016.*

Sergiy Maksymenko

TOPOLOGY LABORATORY, INSTITUTE OF MATHEMATICS, UKRAINIAN NATIONAL ACADEMY OF SCIENCE, TERESHCHENKIVSKA STR. 3, 01601 KYIV, UKRAINE

*Email:* maks@imath.kiev.ua

*ORCID:* [orcid.org/0000-0002-0062-5188](https://orcid.org/0000-0002-0062-5188)

Eugene Polulyakh

TOPOLOGY LABORATORY, INSTITUTE OF MATHEMATICS, UKRAINIAN NATIONAL ACADEMY OF SCIENCE, TERESHCHENKIVSKA STR. 3, 01601 KYIV, UKRAINE

*Email:* polulyah@imath.kiev.ua

# Triples of infinite iterations of hyperspaces of max-plus compact convex sets

A. Savchenko, M. Zarichnyi

**Abstract.** Geometry of the infinite iterated hyperspace of compact max-plus convex sets, their completions and compactifications is investigated.

## 1. INTRODUCTION

In [10] H. Toruńczyk and J. West investigated the construction of the iterated hyperspace functor. For a compact metric space  $X$ , this construction leads to the metric direct limit  $X'$  of the sequence

$$X \rightarrow \exp X \rightarrow \exp^2 X \rightarrow \dots,$$

where every map is the singleton embedding  $x \mapsto \{x\}$ . In particular, they proved that, for any Peano continuum  $X$ , the completion  $X^*$  of  $X'$  is homeomorphic to the separable Hilbert space  $\ell^2$ .

The paper [14] is devoted to the construction of iterated superextension (the superextension functor was defined by J. de Groot [3]). It turned out that the completed infinite iterated superextension admits a natural compactification, which is the inverse limit of iterated superextensions. This result was considerably generalized by V. V. Fedorchuk [4]. He introduced the notion of perfectly metrizable functor and described the topology of obtained triples comprised of infinite iterations, their completions, and compactifications by means of inverse systems.

As a partial case, Fedorchuk considered the probability measure functor  $P$ . The direct and inverse sequences of iterated spaces of probability measures were also considered in [11], [12]. R. Mirzakhanyan [7], [8] investigated the case of the inclusion hyperspace functor.

---

*2010 Mathematics Subject Classification:* 52A30, 54B20, 57N20

*Keywords:* max-plus convex set, hyperspace, Hilbert cube

In [2] Ta Khac Cu proved counterparts of the results from [10] for the case of hyperspace of compact convex subsets in normed spaces.

The aim of this note is to extend results of [2] onto the case of the so-called max-plus convexity (see the definition below).

The authors are indebted to the referee for her/his valuable comments.

## 2. PRELIMINARIES

All spaces are assumed to be metrizable topological spaces. Let  $(X, d)$  be a metric space. By  $\exp X$  we denote the hyperspace of a space  $X$ , i.e., the set of all nonempty compact subsets in  $X$  endowed with the Hausdorff metric  $d_H$ :

$$d_H(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0 \mid A \subset O_\varepsilon(B), B \subset O_\varepsilon(A)\}.$$

The Hausdorff metric on  $\exp^2 X = \exp \exp X$  induced by the (Hausdorff) metric  $d_H$  will be denoted by  $d_{HH}$ .

By  $Q = [0, 1]^\omega$  we denote the Hilbert cube. A closed set  $A$  in  $Q$  is called a *Z-set* in  $Q$  if the identity map of  $Q$  can be approximated by maps whose images miss  $A$ . A subset  $A \subset Q$  is called a *Z-skeletoid* [1] if  $A = \cup_{i=1}^\infty A_i$ , where  $A_1 \subset A_2 \subset \dots$  is a sequence of *Z-sets* satisfying the condition: for each  $\varepsilon > 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$  and a *Z-set*  $C \subset Q$  there exist  $m > n$  and an autohomeomorphism  $\psi_\varepsilon: Q \rightarrow Q$  such that

- (1)  $d(\psi_\varepsilon, \text{id}) < \varepsilon$ ;
- (2)  $\psi_\varepsilon|_{C \cap A_n} = \text{id}$ ;
- (3)  $\psi_\varepsilon(C) \subset A_m$ .

(here  $d$  denotes a fixed compatible metric on  $Q$ ). See [1] for the necessary properties of *Z-skeletoids* in  $Q$ .

Recall that a map  $f: X \rightarrow Y$  is called *soft* [9] provided that for every commutative diagram

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & X \\ \downarrow & & \downarrow f \\ Z & \xrightarrow{\psi} & Y \end{array}$$

such that  $Z$  is a paracompact space and  $A$  is a closed subset of  $Z$  there exists a map  $\Phi: Z \rightarrow X$  such that  $f \circ \Phi = \psi$  and  $\Phi|_A = \varphi$ .

Let  $\mathbb{R}_{\max} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  and let  $\tau$  be a cardinal number. Given  $x, y \in \mathbb{R}^\tau$  and  $\lambda \in \mathbb{R}$ , we denote by  $x \oplus y$  the coordinate wise maximum of  $x$  and  $y$  and by  $\lambda \odot x$  the vector obtained from  $x$  by adding  $\lambda$  to every its coordinate. A subset  $A$  in  $\mathbb{R}^\tau$  is said to be *max-plus convex* if  $\alpha \odot a \oplus \beta \odot b \in A$  for all  $a, b \in A$  and  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_{\max}$  with  $\alpha \oplus \beta = 0$ . See, e.g., [6] for the history and applications of max-plus convexity.

A *max-plus convex body* in  $\mathbb{R}^n$  is a max-plus convex set in  $\mathbb{R}^n$  which is the closure of its interior.

The hyperspace of all compact max-plus convex subsets of  $X \subset \mathbb{R}^r$  is denoted by  $\text{mpcc}(X)$ .

Remark that there is a natural max-plus (respectively, max-min) convex structure on the hyperspace  $\text{mpcc}(X)$ , where  $X$  is a max-plus (respectively max-min) convex compact subset of  $\mathbb{R}^\alpha$ ,  $1 \leq \alpha \leq \omega$ .

Given a subset  $\mathcal{A}$  of the hyperspace  $\text{mpcc}(X)$ , we say that  $\mathcal{A}$  is *max-plus convex* if, for every  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$  and every  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in [-\infty, 0]$  with  $\oplus_{i=1}^n \alpha_i = 0$ , we have

$$\oplus_{i=1}^n \alpha_i \odot A_i = \{\oplus_{i=1}^n \alpha_i \odot a_i \mid a_i \in A_i, i = 1, \dots, n\} \in \mathcal{A}.$$

Remark that the set  $\oplus_{i=1}^n \alpha_i \odot A_i$  is easily seen to be an element of the hyperspace  $\text{mpcc}(X)$ . We denote by  $\text{mpcc}^2(X)$  the set of nonempty closed max-plus convex subsets in  $\text{mpcc}(X)$ .

One can similarly define the iterations  $\text{mpcc}^m(X)$ ,  $m \geq 3$ .

### 3. INFINITE ITERATED HYPERSPACES

Let  $\text{mpcc}^2(X)$  denote the set of all nonempty closed convex subsets in  $\text{mpcc}(X)$ , where  $X$  is a compact max-plus convex subspace in  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 1$ . We endow  $\mathbb{R}^n$  with the  $\ell_\infty$ -metric: if

$$x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n,$$

then  $d(x, y) = \max_i |x_i - y_i|$ . Note that the union map

$$u_X: \text{mpcc}^2(X) \rightarrow \text{mpcc}(X)$$

is well-defined. Indeed, if  $\mathcal{A} \in \text{mpcc}(X)$  and for any  $a, b \in u_X(\mathcal{A})$  there are  $A, B \in \mathcal{A}$  such that  $a \in A$  and  $b \in B$ . Since  $\mathcal{A}$  is max-plus convex, for any  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_{\max}$  with  $\alpha \oplus \beta = 0$  we have  $\alpha \odot A \oplus \beta \odot B \in \mathcal{A}$  and therefore  $\alpha \odot a \oplus \beta \odot b \in u_X(\mathcal{A})$ .

**Lemma 3.1.** *For every  $a \in X$  and  $\mathcal{A} \in \text{mpcc}(X)$ ,*

$$d_{\text{HH}}(\{\{a\}\}, \mathcal{A}) = d_{\text{H}}(\{a\}, u_X(\mathcal{A})).$$

**Proof.** First,

$$d_{\text{HH}}(\{\{a\}\}, \mathcal{A}) = \sup\{d_{\text{H}}(\{a\}, A) \mid A \in u_X(\mathcal{A})\} \leq d_{\text{H}}(\{a\}, u_X(\mathcal{A})).$$

On the other hand, if  $d_{\text{HH}}(\{\{a\}\}, \mathcal{A}) < r$ , then  $O_r(a) \supset B$ , for every  $B \in \mathcal{A}$ . Therefore,  $O_r(a) \supset u_X(\mathcal{A})$  and thus  $d_{\text{H}}(\{a\}, u_X(\mathcal{A})) < r$ . This proves the reverse inequality.  $\square$

**Proposition 3.2.** *The map  $u_X$  is soft.*

**Proof.** First we show that  $u_X^{-1}(A)$  is max-plus convex for any  $A \in \text{mpcc}(X)$ . If  $\mathcal{B}, \mathcal{C} \in u_X^{-1}(A)$  and  $\beta, \gamma \in \mathbb{R}_{\max}$  with  $\beta \oplus \gamma = 0$ , then we have

$$\beta \odot \mathcal{B} \oplus \gamma \odot \mathcal{C} = \{\beta \odot B \oplus \gamma \odot C \mid B \in \mathcal{B}, C \in \mathcal{C}\}.$$

Given  $x \in \beta \odot \mathcal{B} \oplus \gamma \odot \mathcal{C} \in \beta \odot \mathcal{B} \oplus \gamma \odot \mathcal{C}$ , we see that there are  $b \in \mathcal{B}$  and  $c \in \mathcal{C}$  such that  $x = \beta \odot b \oplus \gamma \odot c$ . Since  $b, c \in A$ , we conclude that  $u_X(\beta \odot \mathcal{B} \oplus \gamma \odot \mathcal{C}) \subset A$ .

Now, if  $x \in A$ , then there  $B \in \mathcal{B}$  and  $c \in \mathcal{C}$  such that  $x \in B \cap C$ . Then

$$x \in \beta \odot B \oplus \gamma \odot C \in \beta \odot \mathcal{B} \oplus \gamma \odot \mathcal{C}.$$

Thus,  $u_X(\beta \odot \mathcal{B} \oplus \gamma \odot \mathcal{C}) \supset A$ , i.e. finally  $u_X(\beta \odot \mathcal{B} \oplus \gamma \odot \mathcal{C}) = A$ .

We are going to prove that the map  $u_X$  is open. Since the spaces under consideration are compact and metrizable, it suffices to prove that for any  $\mathcal{A} \in \text{mpcc}^2(X)$  and any sequence  $(A_i)$  in  $\text{mpcc}(X)$  converging to

$$A = u_X(\mathcal{A})$$

there exists a sequence  $(\mathcal{A}_i)$  in  $\text{mpcc}^2(X)$  converging to  $\mathcal{A}$  and such that  $u_X(\mathcal{A}_i) = A_i$ , for every  $i \in \mathbb{N}$  (see, e.g., [5]).

For any  $i$ , let  $r_i = d_H(A, A_i)$  and let

$$\mathcal{A}_i = \overline{\text{conv}}_{\text{mp}}(\{A_i \cap \bar{O}_{r_i}(C) \mid C \in \mathcal{A}\})$$

(by  $\overline{\text{conv}}_{\text{mp}}$  we denote the closed max-plus convex hull map). Since the map  $K \mapsto \bar{O}_{r_i}(K)$  is continuous, we conclude that

$$\{A_i \cap \bar{O}_{r_i}(C) \mid C \in \mathcal{A}\} \in \text{exp mpcc}(X).$$

It is easy to see that  $d_{\text{HH}}(\{A_i \cap \bar{O}_{r_i}(C) \mid C \in \mathcal{A}\}, \mathcal{A}) \leq r_i$  and, since the closed max-plus convex hull map is nonexpanding, we obtain that  $d_{\text{HH}}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}) \leq r_i$ .

Now, by [13, Theorem 3.3] the map  $u_X$  is soft as an open map with max-plus convex preimages.  $\square$

Given a compact convex set  $X$  consider the following sequence:

$$X \xrightarrow{s_X} \text{mpcc}(X) \xrightarrow{s_{\text{mpcc}(X)}} \text{mpcc}^2(X) \xrightarrow{s_{\text{mpcc}^2(X)}} \dots$$

Note that every map in this sequence is an isometric embedding. We denote the metric direct limit of this sequence by  $\text{mpcc}^+(X)$  and let  $\text{mpcc}^{++}(X)$  be the completion of  $\text{mpcc}^+(X)$ . In the sequel, we identify the spaces  $\text{mpcc}^n(X)$  with the corresponding subspaces of  $\text{mpcc}^+(X)$  and  $\text{mpcc}^{++}(X)$ .

Denote by  $\text{mpcc}^\omega(X)$  the inverse limit of the sequence

$$\text{mpcc}(X) \xleftarrow{u_X} \text{mpcc}^2(X) \xleftarrow{u_{\text{mpcc}^2(X)}} \text{mpcc}^3(X) \xleftarrow{u_{\text{mpcc}^3(X)}} \dots$$

Let  $\psi_n: \text{mpcc}^\omega(X) \rightarrow \text{mpcc}^n(X)$  denote the natural projection.

There exists a natural embedding  $\theta: \text{mpcc}^+(X) \rightarrow \text{mpcc}^\omega(X)$ . The restriction of this embedding onto the set  $\text{mpcc}^n(X)$  is uniquely determined by the maps

$$s_{nm} = s_{\text{mpcc}^{m-1}(X)} \cdots s_{\text{mpcc}^n(X)}: \text{mpcc}^n(X) \rightarrow \text{mpcc}^m(X), \quad n < m.$$

We write  $\theta = (\theta_n)$ , where  $\theta_n = \psi_n \theta$ .

The following proposition is proved in [4] in general form; in turn, this is a generalization of a result from [14].

**Proposition 3.3.** *The (unique) extension  $\bar{\theta}: \text{mpcc}^{++}(X) \rightarrow \text{mpcc}^\omega(X)$  of the map  $\theta$  is an embedding.*

**Proof.** Similarly as in [10, Lemma 3], one can prove that the map  $\bar{\theta}$  is injective. We are going to show that the map  $\bar{\theta}^{-1}$  is continuous. To this end, for any  $x \in \text{mpcc}^{++}(X)$  and  $\varepsilon > 0$  one should find a neighborhood  $U$  of  $\bar{\theta}(x)$  in  $\text{mpcc}^\omega(X)$  such that

$$\bar{\theta}^{-1}(U) \subset B_\varepsilon(x). \quad (3.1)$$

We write  $\bar{\theta} = (\bar{\theta}_i)$ , where  $\bar{\theta}_i = \psi_i \circ \bar{\theta}$ . Again, similarly as in [10, Lemma 3], the sequence  $(\bar{\theta}_i(x))$  converges to  $x$  and therefore there exists  $n$  such that

$$d(\bar{\theta}_k(x), x) < \varepsilon/4 \quad \text{for all } k \geq n. \quad (3.2)$$

Put

$$V = O_{\varepsilon/4}(\bar{\theta}_n(x)) \subset \text{mpcc}^{n+1}(X), \quad U = \psi_{n+1}^{-1}(V).$$

Let us verify the inclusion

$$\text{mpcc}^+(X) \cap \bar{\theta}^{-1}(U) \subset O_{3\varepsilon/4}(x). \quad (3.3)$$

Let  $y \in \text{mpcc}^+(X) \cap \bar{\theta}^{-1}(U)$ . Then there exists  $k \geq n+1$  such that  $y \in \text{mpcc}^k(X) \subset \text{mpcc}^+(X)$ . Since  $y \in \bar{\theta}^{-1}(U)$ , we have  $\psi_{n+1}(y) \in V$ . Since

$$\varepsilon/2 > d(\psi_{n+1}(y), \bar{\theta}_n(x)),$$

from (3.2) and Lemma 3.1 it follows that

$$d(y, x) \leq d(y, \bar{\theta}_n(x)) + d(\bar{\theta}_n(x), x) < \varepsilon/2 + \varepsilon/4 + 3\varepsilon/4.$$

Therefore, the inclusion in (3.3) is verified. Since  $\text{mpcc}^+(X)$  is dense in  $\text{mpcc}^{++}(X)$ , from (3.3) we obtain that  $\bar{\theta}^{-1}(U) \subset \overline{B_{3\varepsilon/4}(x)} \subset O_\varepsilon(x)$ .  $\square$

Let  $Q = [-1, 1]^\omega$  be the Hilbert cube,  $s = (-1, 1)^\omega$  be its pseudointerior and  $\text{rint } Q = \{(x_i) \in Q \mid \sup_i |x_i| < 1\}$  be its radial interior.

**Theorem 3.4.** *Let  $X$  be a compact max-plus convex body in  $\mathbb{R}^n$ . Then the triple  $(\text{mpcc}^\omega(X), \text{mpcc}^{++}(X), \text{mpcc}^+(X))$  is homeomorphic to the triple  $(Q, s, \text{rint } Q)$ .*

**Proof.** Consider the following metric  $\varrho$  on  $\text{mpcc}^\omega(X)$ ,

$$\varrho((x_i), (y_i)) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d(x_i, y_i)}{2^i},$$

where

$$(x_i), (y_i) \in \text{mpcc}^\omega(X) \subset \prod_{i=1}^{\infty} \text{mpcc}^i(X).$$

For every  $i \in \mathbb{N}$  and  $j > i$ , the maps

$$q_{ij} = \text{mpcc}(s_{i-1, j-1}): \text{mpcc}^i(X) \rightarrow \text{mpcc}^j(X)$$

determine the map  $q_i: \text{mpcc}^i(X) \rightarrow \text{mpcc}^\omega(X)$ .

We first show that the pair  $(\text{mpcc}^\omega(X), \text{mpcc}^{++}(X))$  is homeomorphic to the pair  $(Q, s)$ . By [1, Theorems 2.3 and 3.3, Chapter V], it suffices to prove that the set

$$B = \text{mpcc}^\omega(X) \setminus \text{mpcc}^{++}(X)$$

is a  $Z$ -skeletaloid in  $\text{mpcc}^\omega(X)$ . Note first that the set  $B$  is  $\sigma$ -compact as the complement to the topologically complete set  $\text{mpcc}^{++}(X)$ . Note also that every compact subset  $K \subset B$  is a  $Z$ -set in  $\text{mpcc}^\omega(X)$ . Indeed, the sequence of retractions  $\psi_n: \text{mpcc}^\omega(X) \rightarrow \text{mpcc}^n(X)$  converges uniformly to the identity map of  $\text{mpcc}^\omega(X)$  and the image of every  $\psi_n$  misses  $K$ . By [1, Theorems 3.2, Chapter V], in order to show that  $B$  is a  $Z$ -skeletaloid it suffices to find a  $Z$ -skeletaloid in  $B$ . In turn, it suffices to find a sequence a sequence  $(L_i)$  of compact subspaces in  $B$  such that:

- (1) every  $L_i$  is homeomorphic to  $Q$ ;
- (2) every  $L_i$  is a  $Z$ -set in  $Q_{i+1}$ ;
- (3) for every  $i$  there is a retraction  $r_i: \text{mpcc}^\omega(X) \rightarrow L_i$  and the sequence  $(r_i)$  of retractions uniformly converges to the identity map.

The construction of such a sequence  $(L_i)$  is analogous to that in the proof of [4, Theorem 4], therefore we drop the details. We suppose that  $X$  is a max-plus convex body in  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ . Also, we suppose that  $\text{diam } X \leq 1$ . Then  $\text{diam } \text{mpcc}^\omega(X) \leq 1$ .

By  $K_1$  we denote the set

$$\{A \in \text{mpcc}(X) \mid \text{there is } x \in A \text{ such that } x + (\varepsilon, \dots, \varepsilon) \in A\},$$

where  $\varepsilon > 0$ . Clearly,  $K_1$  is max-plus convex and if  $\varepsilon$  is small enough then  $K_1$  is nonempty and can be made as close to  $\text{mpcc}(X)$  as we wish. We require that there is a retraction  $r_1$  of  $\text{mpcc}(X)$  onto  $K_1$  which is 1-close to the identity. Let  $L_1 = q_1(K_1)$ .

Assuming that  $K_i$ ,  $i \leq p$ , are already constructed we let

$$K_{p+1} = \{A \in \text{mpcc}^p(X) \mid \text{there is } x \in A \text{ such that } x + (\varepsilon, \dots, \varepsilon) \in A\},$$

where  $\varepsilon > 0$  is chosen small enough that

$$\text{mpcc}(s_{\text{mpcc}^{p-1}(X)})(K_p) \subset K_{p+1}$$

and there is a retraction

$$r_{p+1}: \text{mpcc}^{p+2}(X) \rightarrow K_{p+1}$$

which is  $2^{-p}$ -close to the identity. Let  $L_{p+1} = q_{p+1}(K_{p+1})$ .

Thus,  $L = \cup_{i=1}^{\infty} L_i$  is a  $Z$ -skeletaloid in  $\text{mpcc}^{\omega}(X)$ . We conclude that the pair  $(\text{mpcc}^{\omega}(X), \text{mpcc}^{++}(X))$  is homeomorphic to  $(Q, s)$ .

Similarly, one can prove that  $\text{mpcc}^{+}(X)$  is a  $Z$ -skeletaloid in  $\text{mpcc}^{\omega}(X)$ . Therefore, the pair  $(\text{mpcc}^{\omega}(X), \text{mpcc}^{+}(X))$  is homeomorphic to  $(Q, \text{rint } Q)$ .

We now apply [4, Theorem 2] to finish the proof.  $\square$

#### 4. REMARKS AND OPEN QUESTIONS

It is plausible that the main result can be extended to the case of all max-plus convex subsets of  $\mathbb{R}^{\alpha}$ ,  $\alpha \leq \omega$ , of dimension  $\leq 1$ .

We also conjecture that there is a counterpart of the main result for the hyperspace of max-min convex sets in  $\mathbb{R}^{\tau}$ . Given  $\lambda \in \mathbb{R}_{\max} \cup \{\infty\}$  and  $x = (x_{\alpha}) \in \mathbb{R}^{\tau}$ , we define  $\lambda \otimes x = (\min\{\lambda, x_{\alpha}\})$ . A subset  $A$  in  $\mathbb{R}^{\tau}$  is said to be *max-min convex* if  $\alpha \otimes a \oplus b \in A$  for all  $a, b \in A$  and  $\alpha \in \mathbb{R}_{\max}$ .

#### REFERENCES

- [1] C. Bessaga, A. Pełczyński. *Selected topics in infinite-dimensional topology*, volume 58 of *Monografie Matematyczne*. Warsaw: PWN, 1975.
- [2] Ta Khac Cu. Direct limits which are hilbert spaces. *Acta Math. Vietnam.*, 14(2):67–73, 1989.
- [3] J. de Groot. Superextensions and supercompactness. In *Proc. I. Intern. Symp. on Extension Theory of Topological Structures and its Applications*, pages 89–90. VEB Deutscher Verlag Wiss., Berlin, 1967.
- [4] V. V. Fedorchuk. Triples of infinite iterates of metrizable functors. *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, 36(2):411–433, 1991.
- [5] V. V. Fedorchuk, V. V. Filippov. *General Topology. Basic Constructions [in Russian]*. Izd. Mosk. Univ., Moscow, 1988.
- [6] S. Gaubert, R. Katz. Max-plus convex geometry. In Renate A. Schmidt, editor, *Relations and Kleene Algebra in Computer Science*, volume 4136 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 192–206, 2006.
- [7] R. E. Mirzakhanyan. On infinite iterations of the functor of inclusion hyperspace. *Vestn MGU. Mat., Mekh.*, (6):14–17, 1988.
- [8] R. E. Mirzakhanyan. On the functor of completed iterated inclusion hyperspace. *Vestn MGU. Mat., Mekh.*, (2):75–77, 1989.
- [9] E. V. Shchepin. Functors and uncountable powers of compacta. *Uspekhi mat. nauk*, 36:3–62, 1981.
- [10] H. Toruńczyk, J. West. A hilbert space limit for the iterated hyperspace functor. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 89:329–335, 1983.



- [11] A. M. Vershik. Theory of decreasing sequences of measurable partitions. *St. Petersburg Math. J.*, 6(4):705–761, 1994.
- [12] A. M. Vershik. Kantorovich metric: Initial history and little-known applications. *Journal of Mathematical Sciences*, 133(4):1410–1417, 2006.
- [13] M. Zarichnyi. Michael selection theorem for max-plus compact convex sets. *Topology Proceedings*, 31(2):677–681, 2007.
- [14] M. M. Zarichnyi. *General topology*, volume 167, chapter Iterated superextensions, pages 45–59. Moscow University Press, 1986.

*Received: April 10, 2016, accepted: May 18, 2016.*

Aleksandr Savchenko

KHERSON STATE AGRARIAN UNIVERSITY, 23 ROZY LIUKSEMBURG STR., 73006 KHERSON,  
UKRAINE

*Email:* savchenko1960@rambler.ru

Mykhailo Zarichnyi

DEPARTMENT OF MECHANICS AND MATHEMATICS, LVIV NATIONAL UNIVERSITY, UNIVER-  
SYTETSKA STR. 1, 79000 LVIV, UKRAINE

*Email:* mzar@litech.lviv.ua

# Топологія потоків Морса-Смейла з особливостями на межі двовимірного диска

М. В. Лосєва, О. О. Пришляк

**Abstract.** We analyze topological properties of Morse-Smale flows on two-dimensional disk whose singularities lie on the boundary of the disk. A complete topological invariant for such flows is constructed. We also obtain a topological classification of these flows and propose a method of their enumeration.

**Анотація.** В роботі досліджуються топологічні властивості потоків Морса-Смейла на двовимірному диску, у яких особливості лежать на межі диска. Побудовано повний топологічний інваріант цих потоків. Отримана їх топологічна класифікація та запропоновано спосіб їх нумерації.

## Вступ

На замкненому многовиді векторне поле завжди породжує потік. У випадку компактного многовиду з межею векторне поле буде породжувати потік тоді і тільки тоді, коли воно дотикається до межі в кожній її точці [1].

Нехай  $H$  — компактний многовид з межею  $\partial H$ . Позначимо через  $\mathfrak{X}(H, \partial H)$  простір векторних  $C^r$  полів на  $H$  дотичних до  $\partial H$ , оснащений звичайною  $C^r$  топологією. В цьому просторі можна наступним чином визначити структурну стійкість: векторне поле  $X \in \mathfrak{X}(H, \partial H)$  є  $C^r$  структурно стійким, якщо воно має  $C^r$  окіл  $\mathfrak{U}$ , такий, що кожне поле  $Y \in \mathfrak{U}$  є топологічно еквівалентним до  $X$ , тобто існує гомеоморфізм  $h$ , який переводить орбіти  $X$  в орбіти  $Y$  та зберігає їх орієнтацію.

Для поля  $X \in \mathfrak{X}^\infty(H, \partial H)$  позначимо через  $\omega(X)$  множину його неблукаючих точок.

---

*Ключові слова:* топологічна класифікація, потоки, поверхня з межею  
УДК 517.956.4

Нехай  $H$  — замкнений многовид класу  $C^\infty$  і  $X^r(H)$ ,  $r \geq 1$ , — множина векторних  $C^r$  полів з  $C^r$  топологією. Тоді векторне поле  $X \in X^r(H)$  називається полем *Морса-Смейла*, якщо виконуються такі умови:

- (1)  $\omega(X)$  є простою, тобто вона має лише скінченну кількість орбіт, усі з яких гіперболічні;
- (2) якщо  $\sigma_i, \sigma_j \in \omega(X)$ , то нестійкий многовид  $W^U(\sigma_i)$  трансверсальний до стійкого многовиду  $W^S(\sigma_j)$ .

Топологічній класифікації полів Морса-Смейла присвячено багато робіт, зокрема [2], [8], [6].

Множина векторних полів Морса-Смейла є відкритою і непорожньою множиною в  $\mathfrak{X}^r(H)$ ,  $r \geq 1$ , а кожен її елемент структурно стійкий [4], [5].

Поля, що знаходяться в загальному положенні до межі многовиду, ( $m$ -поля) досліджувались в роботах [9], [10], [11].

Полем *Морса* на многовиді з межею будемо називати векторне поле  $X \in X^r(H)$ , що задовольняє такі умови:

- (1)  $\omega(X)$  є скінченою, тобто має скінченне число точок, усі з яких є гіперболічними особливими точками;
- (2) якщо  $\sigma_i, \sigma_j \in \omega(X)$  і в точці  $x \in W^U(\sigma_i) \cap W^S(\sigma_j)$  стійкий та нестійкий многовиди перетинаються нетрансверсально, то  $x \in \partial H$ ;
- (3) поле дотичне до межі і його обмеження на межу є полем Морса-Смейла.

На замкнених поверхнях потоки Морса-Смейла утворюють всюди щільну множину на множині всіх потоків. Серед потоків, у яких множина неблукаючих точок складається зі скінченного числа траєкторій, структурно стійкими є лише потоки Морса-Смейла. Аналогічні результати мають місце і для многовидів з межею. Зокрема, ці результати доведені в роботах [3], [7].

*Мета даної роботи* — описати топологічну структуру потоків Морса-Смейла на двовимірному диску, у яких особливості лежать на межі диска.

## 1. ПРОСТІ ПОТОКИ

Потік Морса-Смейла на двовимірному диску будемо називати *простим*, якщо у нього всі особливості лежать на межі.

**Лема 1.1.** *Простий потік Морса-Смейла на двовимірному диску не містить замкнених траєкторій.*

**Доведення.** Припустимо, що потік має замкнену траєкторію. Тоді вона обмежує область гомеоморфну двовимірному диску. Відобразимо

що область на верхню півсферу. При цьому потік на області буде індукувати потік на верхній півсфері. Застосувавши симетрію відносно горизонтальної площини побудуємо потік на нижній півсфері, що продовжує потік з верхньої півсфери. Тоді отримає потік на двовимірній сфері без нерухомих точок, що неможливо, бо за теоремою Пуанкаре-Хопфа сума індексів нерухомих точок потоку на сфері повинна дорівнювати 2. Отримане протиріччя доводить лему.  $\square$

Всі нерухомі точки потоку на 2-диску поділяються три типи: 1) витоки, 2) стоки, 3) сідла.

В подальшому, для сідлових особливих точок будемо використовувати такі назви:

- 1) *a*-сідло для особливої точки в яку входять дві траєкторії і з якої виходить одна (вона є стоком при обмеженні потоку на межу),
- 2) *b*-сідло для особливої точки з якої виходять дві траєкторії і в яку входить одна (вона є витком при обмеженні потоку на межу) (Див. рис. 1.1.)

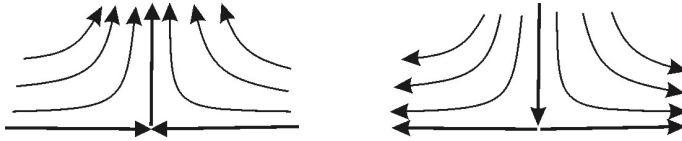


Рис. 1.1. *a*-сідло (зліва) та *b*-сідло (справа)

**Лема 1.2.** Для простого потоку Морса-Смейла на двовимірному диску з  $s$  нерухомими точками число сідел  $l$  дорівнює

$$l = (s - 2)/2. \quad (1.1)$$

**Доведення.** Нехай простий потік має  $k$  витоків,  $m$  стоків та  $l$  сідел ( $s = k + l + m$ ). Так само як і в лемі 1.1, подвоївши потік на сферу і застосувавши формулу Ейлера для ейлерової характеристики, маємо  $k - l + m = 2$ . Звідки  $s = k + l + m = 2 + 2l$ , що і дає потрібну формулу.  $\square$

## 2. СЕПАРАТРИСНА ДІАГРАМА

*Сепаратрисою* називається траєкторія, що входить або виходить із сідла та не лежить на межі диска. Сепаратрису також можна охарактеризувати як внутрішню траєкторію, для якої існує окіл  $U$  такий, що для довільної точки  $x$  сепаратриси і довільного околу  $V$  цієї точки, існує точка  $y \in V$ , траєкторія якої не міститься в  $U$ .

*Сепаратрисною діаграмою* простої функції називається орієнтований граф, вершинами якого є нерухомі точки потоку, а ребрами — траєкторії межі та сепаратриси, причому орієнтація ребер відповідає напрямку руху за траєкторіями і на графі виділений цикл, що складається з траєкторій межі.

Дві сепаратрисні діаграми називаються *еквівалентними*, якщо між їх графами існує ізоморфізм, що зберігає орієнтації ребер та відображає виділений цикл у виділений цикл.

Ребра на виділеному циклі будемо називати *граничними*, а сепаратриси — *внутрішніми*. Отже, топологічна еквівалентність відображає граничні ребра на граничні ребра, а внутрішні — на внутрішні.

**Лема 2.1.** *Сепаратрисна діаграма має такі властивості:*

- 1) Для кожної сепаратриси принаймні один з її кінців є вершиною валентності 3.
- 2) Число сепаратрис  $l$  та число вершин  $s$  пов'язані формулою (1.1).
- 3) Кожна сепаратриса розбиває виділений цикл на дві частини (кінці сепаратриси належать кожній з цих частин) так, що
  - a) в кожній з частин непарне число вершин;
  - b) для будь-якої іншої сепаратриси обидва її кінці належать одній з двох частин.
- 4) Для кожної вершини, обидва інцидентні ребра з граничного циклу мають по відношенню до цієї вершини однаковий напрямок, тобто обидва входять в неї або обидва виходять з неї.
- 5) Якщо якийсь з вершин інцидентні більше ніж одна сепаратриса, то всі ці сепаратриси мають по відношенню до вершини напрямок такий, як і інцидентні їй граничні ребра (ця вершина є стоком або витокком).

**Доведення.** 1) Сідло є вершиною валентності 3 і одним з кінців сепаратриси.

2) Кожна сепаратриса містить рівно одне сідло як один із своїх кінців, і кожне сідло є кінцем сепаратриси. Тому сепаратрис і сідел однакове число, яке, згідно леми, обчислюється за формулою (1.1).

3) Якщо обмежити потік на межу (коло), то матимемо два типи нерухомих точок — витокки і стоки, які чергуються між собою. Нехай сепаратриса виходить із сідлової точки ( $a$ -сідло). Тоді ця точка є стоком для обмеження потоку на межу. Інший кінець також є стоком. Тому в одній з частин разом із зазначеними двома точками буде на стоків буде на один більше ніж витоків (ми починаємо обходити нерухомі точки зі стоку, вони чергуються і закінчуємо стоком). Отже, всього нерухомих

точок непарне число. Те, що для іншої сепаратриси обидва кінці лежать в одній частині рівносильне тому, що сепаратриси не перетинаються.

4) Ця властивість безпосередньо перевіряється для кожного з чотирьох типів нерухомих точок.

5) Якщо валентність вершини більша за 3, то ця точка не може бути сідлом, бо її валентність дорівнює 3. Отже, вона є стоком або витокком. Лемму доведено.  $\square$

### 3. ТОПОЛОГІЧНА ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ ПОТОКІВ

**Теорема 3.1.** (Критерій топологічної еквівалентності). *Два простих потоки на 2-диску будуть топологічно еквівалентними тоді та тільки тоді, коли їх сепаратрисні діаграми ізоморфні.*

**Доведення.** *Необхідність.* Топологічна еквівалентність відображає особливі точки у особливі точки, сепаратриси — на сепаратриси, граничні траєкторії на — граничні траєкторії, а отже, породжує ізоморфізм сепаратрисних діаграм.

*Достатність.* Ізоморфізм сепаратрисних діаграм задає бієктивні відповідності між множинами особливих точок, множинами сепаратрис та множинами граничних траєкторій. Нехай  $x, y$  — стандартні координати на 2-диску. Розглянемо на ньому стандартну ріманову метрику. Для кожного зовнішнього та внутрішнього ребра знайдемо середину у цій рімановій метриці. Для кожного з потоків розглянемо такі досить малі  $\epsilon$ -околи цих середин, які не перетинаються між собою, а також з іншими сепаратрисами та граничними траєкторіями. Якщо для першого потоку для одного з ребер  $e$ , його довжина менша ніж відповідна довжина у ребра другого потоку, то розтягнемо ребро  $e$  в його середині  $p$ . Для цього розглянемо ріманову метрику

$$ds^2 = (1 + h_x^2)dx^2 + 2h_x h_y dx dy + (1 + h_y^2)dy^2,$$

де

$$h(x, y) = \begin{cases} ce^{\frac{1}{x^2+y^2-\epsilon^2}}, & x^2 + y^2 < \epsilon^2, \\ 0, & x^2 + y^2 \geq \epsilon^2 \end{cases}$$

При збільшенні константи  $c$  збільшується і довжина ребра  $e$ . Оскільки ми можемо так збільшувати довжину ребра до як завгодно великої величини і це збільшення неперервно залежить від  $c$ , то знайдеться таке значення  $c$ , при якому довжини відповідних ребер однакові. Пророблюючи цю процедуру з кожним ребром, ми отримаємо ріманові метрики, в яких довжини відповідних ребер однакові. Якщо  $s_1$  — натуральний

параметр на ребрі першого потоку, а  $s_2$  — на відповідному ребрі другого потоку, відкладені від відповідних вершин, то рівність  $s_2 = s_1$  задає гомеоморфізм між відповідними ребрами.

Продовжимо отриманий гомеоморфізм в середину кожної з областей. Для цього в кожній області  $U$  розглянемо вершину витік і таку систему координат  $x, y$ , в якій векторне поле  $X = (x, y)$  є полем швидкостей потоку. Гомеоморфно відобразимо дугу  $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = \epsilon^2\} \cap U$  першого потоку на відповідну дугу другого потоку. Цей гомеоморфізм задає відповідність між траєкторіями. Гомеоморфізм між відповідними траєкторіями будемо будувати за допомогою натуральних параметрів за формулою  $s_2 = ks_1$ , де константа  $k$  дорівнює відношенню довжин відповідних траєкторій. Оскільки кожна траєкторія з внутрішності області починається в якомусь витокі, то ці гомеоморфізми задають відображення 2-диска, яке за побудовою є гомеоморфізмом, що відображає траєкторії на траєкторії, тобто є топологічною еквівалентністю. Теорему доведено.  $\square$

**Теорема 3.2.** (Реалізація). *Орієнтований граф з виділеним циклом є сепаратрисною діаграмою деякої простої функції, якщо він задовольняє властивостям 1)-5) з лемми 2.1.*

**Доведення.** З умови 3)-а) лемми 2.1 випливає парність вершин графа. Зафіксуємо на межі 2-диску ці вершини у вершинах правильного многокутника. Умова 3)-а) рівносильна тому, що якщо побудувати сепаратриси як хорди в 2-диску, то вони не будуть перетинатися. Будемо розглядати області, на які сепаратриси (хорди) розбивають 2-диск, як криволінійні многокутники.

Покажемо, що в кожній такій області є єдина вершина витік і єдина вершина стік. З умови 3)-а) випливає, що для кожної сепаратриси один з її кінців є сідлом, а інший — стоком або витокі. Зафіксуємо область і сепаратрису з її межі. Нехай ця сепаратриса починається в  $a$ -сідлі (випадок  $b$ -сідла аналогічний, з заміною всіх напрямків руху на протележні). Тоді вона закінчується у стоці. Значить у області є стік на межі. Розглянемо траєкторію на межі області, що закінчується у цьому стоці. Початок цієї траєкторії є або витокі або  $b$ -сідлом. Отже, у першому випадку є витокі на межі. У другому випадку витокі буде початок сепаратриси, що входить це  $b$ -сідло.

Те, що інших витоків і стоків на межі не існує, доводиться від супротивного. Наприклад, якщо існує 2 витокі, то розглянувши об'єднання траєкторій, що виходять з першого витокі, і об'єднання траєкторій, що виходять з другого витокі, отримаємо сепаратрису, яка лежить на перетині їх меж, а це суперечить визначенню області. Якщо  $a(t)$  і  $b(t)$  —

шляхи, що починаються у витоку і закінчуються у стоці (об'єднання яких дає всю межу області), то траєкторії всередині області можна задати рівнянням  $(1 - s)a(t) + sb(t)$  для  $s \in [0, 1]$ . Проробивши це для кожної області отримаємо шуканий потік на 2-диску.  $\square$

#### 4. Код потоку

Задамо циклічну нумерацію вершин. В якості першої вершини виберемо одну з вершин з найбільшою валентністю (якщо всі вершини мають валентність 3 — то стік або витік).

Складемо список, що починається з 1, а далі за зростанням йдуть номери сідел, що є кінцями сепаратрис, інцидентних вершині 1. Наприклад,  $1 - 3 - 5$ .

Далі, для вершини з найменшим номером, що не є сідлом, складемо аналогічний список, наприклад  $8 - 6$ .

Продовжимо цю процедуру для інших вершин і в результаті отримаємо, набір списків. Якщо вершина 1 є стоком, то припишемо їй знак  $+$ , а якщо витоком, то знак  $-$ .

Будемо казати, що один такий набір *менший* за інший, якщо в ньому декілька перших елементів такі самі, як у другого набору, а наступний — менший. Якщо, всі елементи тотожні один одному, але знаки при одиниці різні, то найменшим будемо вважати набір зі знаком  $-$ .

*Кодом потоку* будемо називати набір списків зі знаком біля 1, який є найменшим серед усіх можливих наборів списків, побудованих так, як було описано вище. Приклад коду:  $+1 - 3 - 5, 8 - 6$ .

**Теорема 4.1.** *Два потоки топологічно еквівалентні тоді і тільки тоді, коли у них однакові коди.*

**Доведення.** *Необхідність.* Оскільки топологічна еквівалентність зберігає порядок вершин і код за сепаратрисною діаграмою виписується однозначно, то з топологічної еквівалентності потоків випливає рівність кодів.

*Достатність.* З рівності кодів випливає, що сепаратрисні діаграми еквівалентні. Еквівалентність задається відображенням, яке переводить вершини однієї діаграми у вершини з тими самими номерами на іншій діаграмі.  $\square$

#### 5. ПРИКЛАДИ ЗАСТОСУВАНЬ ТА ОБЧИСЛЕНЬ

Покажемо, як можна застосовувати побудовані вище інваріанти для обчислення кількості топологічно не еквівалентних потоків із заданим числом сепаратрис.



Якщо у потоку немає сепаратрис, то він має дві особливі точки — стік і витік. Всі такі потоки мають таку саму структуру, що і потік, зображений на рис. 5.2.

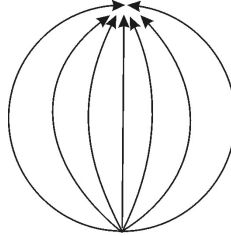
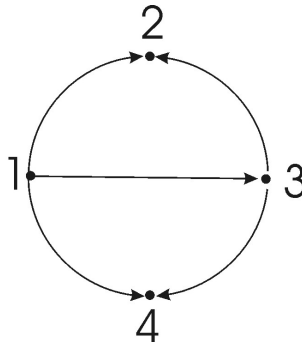


Рис. 5.2. Потоки без сідел

Для потоків з однією сепаратрисою можливі два коди:  $-1-3$  (рис. 5.3) та  $+1-3$ .

Рис. 5.3. Сепаратрисна діаграма потоку з кодом  $-1-3$ 

Для потоків з двома сепаратрисами можливі чотири коди:

- 1)  $-1-3-5$  (Рис. 5.4 зліва);      3)  $-1-3,4-6$ ;  
 2)  $+1-3-5$ ;      4)  $-1-3,6-4$  (Рис. 5.4 справа).

Перші два коди відрізняються тільки знаком. Тому будемо записувати їх як  $\pm 1-3-5$ . Третій і четвертий коди відрізняються порядком і ми запишемо їх як  $-1-3, \pm 4-6$ .

Для потоків з трьома сепаратрисами можливі чотирнадцять кодів:

- 1,2)  $\pm 1-3-5-7$ ;      9-12)  $\pm 1-3,4-8, \pm 5-7$ ;  
 3,4)  $\pm 1-3-7,4-6$ ;      13-14)  $\pm 1-3,7-5,8-4$ .  
 5-8)  $\pm 1-3-5, \pm 4-6$ ;

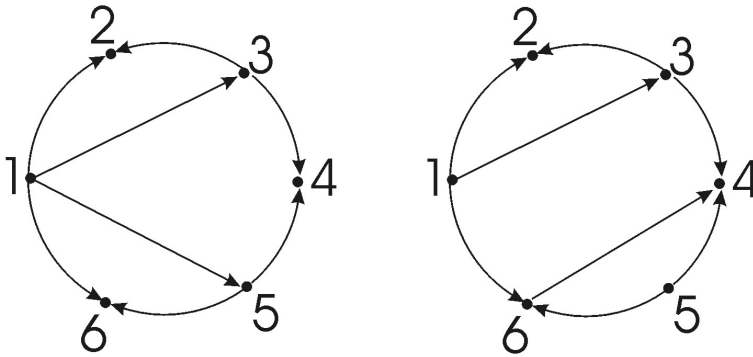


Рис. 5.4. Сепаратрисні діаграми потоків з кодами  $-1 - 3 - 5$  та  $-1 - 3, 6 - 4$

Провівши аналогічні міркування можна пересвідчитись, що з чотирма сепаратрисами можливі 35 потоків, а з п'ятьма сепаратрисами — 190 різних потоків.

### ВИСНОВОК

В роботі розглядалися потоки на двовимірному диску, у яких всі особливі точки є гіперболічними і лежать на межі. Доведено критерій топологічної еквівалентності таких потоків. Отримані в роботі результати повністю вирішують проблему структурної класифікації оптимальних потоків з гіперболічними особливими точками на межі двовимірного диска. Автори сподіваються, що вдасться отримати аналогічні результати для інших поверхонь з межею.

### ЛІТЕРАТУРА

- [1] G. Fleitas. Classification of gradient-like flows on dimensions two and three. *Bulletin of Brazilian Mathematical Society*, 6(2):155–183, 1975.
- [2] E. Girik. Classification of polar Morse-Smale vector fields on two-dimensional manifolds. *Meth. Funct. Anal. Topology*, 2(1):23–37, 1996.
- [3] R. Labarca, M. J. Pacifico. Stability of Morse-Smale vector fields on manifolds with boundary. *Topology*, 29(1):57–81, 1990.
- [4] J. Palis. On Morse-Smale dynamical systems. *Topology*, 8:385–405, 1996.
- [5] J. Palis, S. Smale. Structural stability theorems. *Proc. Sympos. Pure Math.*, 14:223–231, 1970.
- [6] D. Poltavec. Equivalent polar Morse-Smale systems on two-dimensional manifolds of genus 3. In *International Conference on Topology and Applications, Book of Abstracts*, page 29, 1995.

- [7] С. Robinson. Structural stability on manifolds with boundary. *Journal of Differential Equations*, 37(1):1–11, 1980.
- [8] О. Кадубовський. Класифікація векторних полів Морса-Смейла на двовимірних многовидах. *Вісник Київського національного університету ім. Тараса Шевченка. Математика, механіка.*, 14:85–88, 2005.
- [9] М. В. Лосева, А. О. Пришляк. О структурно устойчивых обыкновенных дифференциальных уравнениях на поверхностях с краем. *Журнал обчисл. та приклад. математики*, 87(1):45–48, 2002.
- [10] М. В. Лосева, А. О. Пришляк. МС-потокі на тривимірних многовидах з краєм. *Вісн. КНУ, Мат. Мех.*, 15:31–32, 2006.
- [11] А. О. Пришляк. Топологическая классификация  $m$ -полей на двух- и трехмерных многообразиях с краем. *Укр.мат. журн.*, 55(6):799–805, 2003.

*Надійшло до редакції 11 квітня 2016, прийнято до друку 20 травня 2016.*

Лосева Марія Вікторівна  
КНУ ім. Т.Г. ШЕВЧЕНКА, Київ, УКРАЇНА  
*Email: mv.loseva@gmail.com*

Пришляк Олександр Олегович  
КНУ ім. Т.Г. ШЕВЧЕНКА, Київ, УКРАЇНА  
*Email: prishlyak@yahoo.com*  
*ORCID: orcid.org/0000-0002-7164-807X*

# О поверхностях пространства Минковского со стационарными значениями кривизны грассмана образа

М. А. Гречнева, П. Г. Стеганцева

**Abstract.** On the surfaces in Minkowski space with the stationary values of the curvature of the Grassmann image let us consider the classes of the surfaces in Minkowski space  ${}^1R_4$  (spacelike or timelike) with the stationary values of the curvature of the Grassmannian manifold  $PG(2, 4)$  along the domains, which are tangential to its the Grassmann image  $\Gamma^2$

**Аннотация.** В данной работе рассматриваются классы поверхностей (времениподобные и пространственноподобные) пространства Минковского  ${}^1R_4$  со стационарными значениями кривизны грассмана многообразия  $PG(2, 4)$  вдоль площадок, касательных к их грассманову образу  $\Gamma^2$ .

Грассмановы многообразия и грассманов образ поверхностей евклидова пространства являются классическими примерами гладких многообразий, геометрия которых хорошо изучена в работах К. Лейтвейса, Ю. Вонга, Ю. Муто, Ю. А. Аминова, А. А. Борисенко, А. В. Горькавого и других геометров. Несмотря на большое количество публикаций, много вопросов теории грассмановых многообразий и грассманова образа остаются нерешенными. Особенно это касается теории поверхностей многомерных неевклидовых пространств. Математической моделью пространства-времени в специальной теории относительности служит точечное псевдоевклидово пространство индекса 1, которое

---

*Ключевые слова:* Пространство Минковского, грассманово многообразие, секционная кривизна.

УДК 514.76

еще называют пространством Минковского. Одним из первых исследователей грассманаова многообразия псевдоевклидова пространства является Т. Ханган. Также вопросами римановой геометрии грассмано-вых многообразий неизотропных подпространств псевдоевклидова пространства занимался И. Маазикас. Изучению внутренней и внешней геометрии грассманаова многообразия посвящены работы С. Е. Козлова и Д. В. Иванова. В данной работе будем рассматривать классы поверхностей пространства Минковского, кривизна грассманаова образа которых принимает экстремальные значения.

*Грассмано-вым многообразием*  $PG(2, 4)$  пространства Минковского  ${}^1R_4$  (с метрикой  $ds^2 = -dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2$ ) называется множество двумерных плоскостей этого пространства, проходящих через фиксированную точку  $O$ .

В пространстве Минковского существуют плоскости трех типов. Тип плоскости определяется парой ортогональных векторов  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$ . Плоскость  $\sigma$  называется *пространственноподобной* (соотв. *временноподобной*, или *изотропной*), если существуют два ортогональных вектора  $\bar{x}, \bar{y} \in \sigma$  такие, что  $\bar{x}^2 > 0, \bar{y}^2 > 0$  (соотв.  $\bar{x}^2 < 0, \bar{y}^2 > 0$ , или  $\bar{x}^2 = 0, \bar{y}^2 > 0$ ). Тогда грассмано-во многообразие представляет собой дизъюнктное объединение трех подмногообразий

$$PG(2, 4) = {}^S PG(2, 4) \cup {}^T PG(2, 4) \cup {}^{Iz} PG(2, 4).$$

В работе [5] изучены свойства этих подмногообразий, введена гладкая структура, получены формулы для вычисления секционной кривизны.

Пусть  $V^2$  — регулярная неизотропная поверхность пространства  ${}^1R_4$ . Поставим в соответствие каждой точке поверхности  $V^2$  плоскость, проходящую через фиксированную точку пространства  ${}^1R_4$  и параллельную нормальной плоскости  $N_x$  поверхности в точке  $x$ . Получим отображение поверхности  $V^2$  в грассмано-во подмногообразии  ${}^S PG(2, 4)$  или  ${}^T PG(2, 4)$ . *Грассмано-вым образом*  $\Gamma^2$  поверхности  $V^2$  называют образ указанного отображения.

## 1. СТАЦИОНАРНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ СЕКЦИОННОЙ КРИВИЗНЫ

В работе [2] Ю. Вонг показал, что секционная кривизна грассманаова многообразия евклидова пространства принимает значения из отрезка  $[0, 2]$ . В работах [4] и [1] исследуются поверхности, для которых кривизна грассманаова многообразия вдоль площадок, касательных к грассмано-ву образу поверхности, принимает минимальное и максимальное значения. Из работы [6] следует, что секционная кривизна подмногообразий  ${}^S PG(2, 4)$  или  ${}^T PG(2, 4)$  пространства  ${}^1R_4$  может принимать

любые действительные значения. По этой причине будем рассматривать значения секционной кривизны в точках локальных экстремумов.

При стандартном плюккеромом погружении указанных подмногообразий в пространство  ${}^3R_6$  метрика их точечных образов имеет сигнатуру  $(- - + +)$  [5]. Двумерные касательные площадки  $\sigma$  к каждому из подмногообразий будем задавать бивектором  $\bar{\sigma}$  с координатами  $\sigma^{ab} = x^{[a}y^{b]}$ , где  $\bar{X} = (x^a)$  и  $\bar{Y} = (y^b)$ ,  $a, b = 1, \dots, 4$  — касательные векторы. Тогда секционная кривизна в направлении данной площадки определяется формулой [6]:

$$\bar{K}(\sigma) = \frac{\bar{R}_{abcd}\sigma^{ab}\sigma^{cd}}{(g_{ac}g_{bd} - g_{ab}g_{cd})\sigma^{ab}\sigma^{cd}}, \quad (1.1)$$

где  $\bar{R}_{abcd}$  — тензор кривизны, а  $g_{ij}$  — компоненты метрического тензора подмногообразий грассмана многообразия. Формула (1.1) для каждого из подмногообразий  ${}^S PG(2, 4)$  и  ${}^T PG(2, 4)$  имеет вид

$$\bar{K}(\sigma) = \frac{-(-\sigma^{12} + \sigma^{34})^2 + (\sigma^{13} + \sigma^{24})^2}{-(\sigma^{12})^2 + (\sigma^{13})^2 + (\sigma^{14})^2 + (\sigma^{23})^2 + (\sigma^{24})^2 - (\sigma^{34})^2}. \quad (1.2)$$

Координаты  $\sigma^{ab}$  удовлетворяют условию

$$\sigma^{12}\sigma^{34} - \sigma^{13}\sigma^{24} + \sigma^{14}\sigma^{23} = 0.$$

Точки локальных экстремумов находятся из системы уравнений

$$\frac{\partial \bar{K}(\sigma)}{\partial \sigma^{ij}} = 0.$$

В работе [6] рассматривались грассмановы подмногообразия неизотропных подпространств псевдоевклидова  $n$ -пространства произвольного индекса, найдены стационарные значения их секционной кривизны. В случае пространства  ${}^1R_4$  стационарные точки и соответствующие значения секционной кривизны имеют вид:

- 1)  $\sigma^{12} = \sigma^{34}$ ,  $\sigma^{24} = -\sigma^{13}$  и  $\bar{K}(\sigma) = 0$ ;
- 2)  $\sigma^{12} = \sigma^{34} = 0$ ,  $\sigma^{23} = \sigma^{14}$  и  $\bar{K}(\sigma) = 1$ ;
- 3)  $\sigma^{13} = \sigma^{24} = 0$ ,  $\sigma^{23} = -\sigma^{14}$  и  $\bar{K}(\sigma) = 1$ .

## 2. КЛАССЫ ПОВЕРХНОСТЕЙ СО СТАЦИОНАРНЫМИ ЗНАЧЕНИЯМИ СЕКЦИОННОЙ КРИВИЗНЫ ГРАССМАНОВА ОБРАЗА

Опишем те классы поверхностей  $V^2$  (пространственноподобных или времениподобных) пространства  ${}^1R_4$ , для которых кривизна подмногообразий  ${}^S PG(2, 4)$  и  ${}^T PG(2, 4)$  вдоль площадок, касательных к их грассманову образу  $\Gamma^2$ , принимает стационарные значения.

Как и в случае евклидова пространства [3] можно показать, что касательные векторы к грассманову образу записываются в виде

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \left( \frac{L_{11}^2}{\sqrt{g_{11}}}, -\frac{L_{11}^1}{\sqrt{g_{11}}}, \frac{L_{12}^2}{\sqrt{g_{22}}}, -\frac{L_{12}^1}{\sqrt{g_{22}}} \right), \\ \bar{Y} &= \left( \frac{L_{12}^2}{\sqrt{g_{11}}}, -\frac{L_{12}^1}{\sqrt{g_{11}}}, \frac{L_{22}^2}{\sqrt{g_{22}}}, -\frac{L_{22}^1}{\sqrt{g_{22}}} \right),\end{aligned}$$

где  $L_{ij}^k$  — коэффициенты вторых квадратичных форм поверхности  $V^2$ . Тогда бивектор  $\bar{\sigma}$  имеет координаты:

$$\begin{aligned}\sigma^{12} &= \frac{L_{11}^1 L_{12}^2 - L_{12}^1 L_{11}^2}{g_{11}}, & \sigma^{13} &= \frac{L_{11}^2 L_{22}^2 - (L_{12}^2)^2}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}, \\ \sigma^{14} &= \frac{L_{12}^1 L_{12}^2 - L_{22}^1 L_{11}^2}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}, & \sigma^{23} &= \frac{L_{12}^1 L_{12}^2 - L_{11}^1 L_{22}^2}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}, \\ \sigma^{24} &= \frac{L_{11}^1 L_{22}^2 - (L_{12}^1)^2}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}, & \sigma^{34} &= \frac{L_{12}^1 L_{22}^2 - L_{22}^1 L_{12}^2}{g_{22}}.\end{aligned}$$

Рассмотрим случай, когда секционная кривизна принимает стационарное значение, равное нулю. Имеет место

**Теорема 2.1.** Пусть  $V^2 \subset {}^1R_4$  — регулярная времениподобная поверхность с невырожденным грассмановым образом  $\Gamma^2$ . Стационарное значение секционной кривизны подмногообразия  ${}^S PG(2, 4)$  или  ${}^T PG(2, 4)$  вдоль любой неизотропной площадки, касательной к  $\Gamma^2$ , равно нулю тогда и только тогда, когда выполняются условия:

- 1) поверхность  $V^2$  является плоским многообразием в пространстве  ${}^1R_4$ ;
- 2) поверхность  $V^2$  имеет плоскую нормальную связность, т.е. ее первая и вторые квадратичные формы одновременно приводятся к диагональному виду.

**Доказательство.** По условию теоремы грассманов образ  $\Gamma^2$  невырожден, то есть в каждой его точке пространство касательных векторов двумерно. Согласно [6], в каждой точке грассманова многообразия существует двумерная касательная площадка, в направлении которой кривизна принимает стационарное значение  $\bar{K}(\sigma) = 0$ . Эта площадка задается условиями  $\sigma^{24} = -\sigma^{13}$  и  $\sigma^{12} = \sigma^{34}$ . Первое условие запишется в виде

$$\frac{L_{11}^1 L_{22}^2 - (L_{12}^1)^2}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} = -\frac{L_{11}^2 L_{22}^2 - (L_{12}^2)^2}{\sqrt{g_{11}g_{22}}},$$

откуда следует, что гауссова кривизна поверхности  $V^2$  равна нулю, так как гауссова кривизна времениподобной поверхности вычисляется по формуле

$$K = \frac{L_{11}^1 L_{22}^1 - (L_{12}^1)^2 + L_{11}^2 L_{22}^2 - (L_{12}^2)^2}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}.$$

Второе условие имеет вид

$$\frac{L_{11}^1 L_{12}^2 - L_{12}^1 L_{11}^2}{g_{11}} = \frac{L_{12}^1 L_{22}^2 - L_{22}^1 L_{12}^2}{g_{22}}.$$

Для времениподобной поверхности можно выбрать параметризацию таким образом, что  $g_{11} = -g_{22}$ . Тогда равенство

$$L_{11}^1 L_{12}^2 - L_{12}^1 L_{11}^2 = L_{22}^1 L_{12}^2 - L_{12}^1 L_{22}^2$$

означает выполнение условия  $AB = BA$ , где  $A, B$  — матрицы вторых квадратичных форм поверхности. А это условие выделяет поверхности с плоской нормальной связностью.

Обратно, если времениподобная поверхность с плоской нормальной связностью имеет нулевую гауссову кривизну, то секционная кривизна ее грассманова образа равна 0 и это значение является стационарным. Действительно, поскольку поверхность имеет плоскую нормальную связность, то вторые квадратичные формы можно одновременно привести к диагональному виду, т.е.  $L_{12}^1 = L_{12}^2 = 0$ . Тогда координаты бивектора  $\bar{\sigma}$  запишутся в виде

$$\sigma^{12} = \sigma^{34} = 0, \quad \sigma^{13} = \frac{L_{11}^2 L_{22}^2}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}, \quad \sigma^{24} = \frac{L_{11}^1 L_{22}^1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}.$$

Из равенства нулю гауссовой кривизны следует, что

$$L_{11}^2 L_{22}^2 = -L_{11}^1 L_{22}^1.$$

Тогда секционная кривизна равна 0 и достигается при условиях

$$\sigma^{12} = \sigma^{34}, \quad \sigma^{24} = -\sigma^{13},$$

т.е. является стационарным значением.  $\square$

Далее рассмотрим случай, когда секционная кривизна принимает стационарное значение, равное единице. Имеет место

**Теорема 2.2.** Пусть  $V^2 \subset {}^1R_4$  — регулярная поверхность с невырожденным грассмановым образом  $\Gamma^2$ . Стационарное значение секционной кривизны подмногообразия  ${}^S PG(2, 4)$  или  ${}^T PG(2, 4)$  вдоль любой изотропной площадки, касательной к  $\Gamma^2$ , равно единице тогда и только тогда, когда поверхность  $V^2$  является гиперповерхностью некоторого трехмерного подпространства пространства  ${}^1R_4$ .



**Доказательство.** Согласно [6], в каждой точке грассманова многообразия существуют две двумерные касательные площадки, в направлении каждой из которых кривизна принимает стационарное значение  $\bar{K}(\sigma) = 1$ . Первая площадка задается условиями  $\sigma^{12} = \sigma^{34} = 0$  и  $\sigma^{23} = \sigma^{14}$ , которые имеют вид

$$\begin{aligned} L_{11}^1 L_{12}^2 - L_{12}^1 L_{11}^2 &= L_{12}^1 L_{22}^2 - L_{22}^1 L_{12}^2 = 0 \\ L_{12}^1 L_{12}^2 - L_{11}^1 L_{22}^2 &= L_{12}^1 L_{12}^2 - L_{11}^1 L_{22}^2. \end{aligned}$$

Эти условия равносильны равенствам

$$\frac{L_{11}^1}{L_{11}^2} = \frac{L_{12}^1}{L_{12}^2} = \frac{L_{22}^1}{L_{22}^2},$$

из которых следует, что точечная коразмерность поверхности равна 1, то есть она является гиперповерхностью.

Вторая площадка задается условиями  $\sigma^{13} = \sigma^{24} = 0$ ,  $\sigma^{23} = -\sigma^{14}$  или

$$\begin{aligned} L_{11}^2 L_{22}^2 - (L_{12}^2)^2 &= L_{11}^1 L_{22}^1 - (L_{12}^1)^2 = 0, \\ L_{11}^1 L_{22}^2 + L_{11}^2 L_{22}^1 &= 2L_{12}^1 L_{12}^2. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Эти условия могут быть записаны иначе, поскольку одну из вторых квадратичных форм всегда можно привести к диагональному виду. Положим  $L_{12}^1 = 0$ . Тогда условия (2.3) означают, что либо одна из вторых квадратичных форм тождественно равна нулю, либо они имеют вид  $II^k = L_{ii}^k du_i^2$ . В каждом из этих случаев коэффициенты вторых квадратичных форм снова пропорциональны, то есть поверхность  $V^2$  является гиперповерхностью.

Обратно, если поверхность  $V^2$  вкладывается в трехмерное пространство, то

$$\frac{L_{11}^1}{L_{11}^2} = \frac{L_{12}^1}{L_{12}^2} = \frac{L_{22}^1}{L_{22}^2} = k,$$

где  $k$  — коэффициент пропорциональности. Тогда из формулы (1.2) следует, что  $\bar{K}(\sigma) = 1$  и это значение является стационарным.  $\square$

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Y. Muto. The gauss map of submanifolds in a euclidean space. *J. Math. Soc. Japan*, 30(1):85–100, 1978.
- [2] Y. C. Wong. Sectional curvatures of grassmann manifolds. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 60(1):75–79, 1968.
- [3] Ю. А. Аминов. *Геометрия подмногообразий*. К.: Наукова думка, 2002.
- [4] А. А. Борисенко, Ю. А. Николаевский. О поверхностях с максимальной кривизной грассманова образа. *Мат. заметки*, 48(3), 1990.
- [5] М. А. Гургенидзе. О погружении грассманова многообразия псевдоевклидова пространства. *Pr. Inst. Mat. Nats. Akad. Nauk Ukr. Mat. Zastos.*, 3(3):107–114, 2006.

- [6] И. Маазикас. К римановой геометрии грасмановых многообразий неизотропных подпространств псевдоевклидова пространства. *Ученые записки Тартусского университета*, (342):76–82, 1974.

*Поступило в редакцию 11 апреля 2016, принято к печати 25 мая 2016.*

Гречнева Марина Александровна

ЗНУ, ЗАПОРОЖЬЕ, УКРАИНА

*Email:* mag83@list.ru

Стеганцева Полина Георгиевна

ЗНУ, ЗАПОРОЖЬЕ, УКРАИНА

*Email:* steg\_pol@mail.ru

## О 4-квазипланарных отображениях полукватернионных келеровых многообразий

И. Н. Курбатова

**Abstract.** Earlier we introduces a concept of a semi-quaternion structure on a manifold with affine connection generated by a couple of almost complex structures. We also investigated 4-quasiplanar mappings of spaces with semi-quaternion structures under various conditions of differential character. In the present article we continue study of 4-quasiplanar mappings of semi-quaternion Kählerian spaces. Geometrical objects being invariant under the considered mappings are constructed. The class of the semi-quaternion Kählerian spaces admitting a 4-quasiplanar mapping on a flat space (4-quasiplane) is allocated. Their tensor sign is received. It is proved that any 4-quasiplane semi-quaternion Kählerian space admits non-trivial 4-quasiplanar mappings (it is an analog of the theorem of Beltrami in the theory of geodetic mappings of Riemannian spaces). It is shown that the 4-quasiplane semi-quaternion Kählerian space represents a direct product of two Kählerian spaces of constant holomorphic curvature.

**Аннотация.** Ранее мы ввели в рассмотрение понятие полукватернионной структуры на пространстве аффинной связности, порожденной парой почти комплексных структур, коммутирующих друг с другом. Мы также исследовали 4-квазипланарные отображения пространств аффинной связности с полукватернионными структурами при различных условиях дифференциального характера. В настоящей статье продолжается изучение 4-квазипланарных отображений полукватернионных келеровых пространств. Строятся геометрические объекты, инвариантные относительно рассматриваемых отображений. Выделен класс полукватернионных келеровых пространств (4-квазиплоские), допускающих 4-квазипланарное отображение на плоское пространство. Получен их тензорный признак. Доказано, что любое 4-квазиплоское полукватернионное келерово пространство допускает нетривиальные 4-квазипланарные отображения (это аналог теоремы Бельтрами в теории геодезических отображений римановых пространств). Показано, что 4-квазиплоское полукватернионное келерово пространство представляет собой прямое произведение двух келеровых пространств постоянной голоморфной кривизны.

---

*Ключевые слова:* Риманово пространство, кватернионная структура, келерова структура

УДК 517.764

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В современной дифференциальной геометрии интенсивно развивается теория диффеоморфизмов многообразий с аффинорными структурами различных типов.

В настоящей статье продолжается начатое нами в [4], [5], [6] изучение 4-квазипланарных отображений (4КПО) псевдо-римановых пространств с полукватернионной структурой.

Исследования носят локальный характер и проводятся в классе достаточно гладких функций.

Напомним, что *полукватернионной* [6] называется структура, которая порождается парой почти комплексных структур [3], коммутирующих между собой. Соответственно, *почти полукватернионным* называется псевдо-риманово пространство  $V_n$  с заданными на нем почти комплексными структурами  $\overset{1}{F}$  и  $\overset{2}{F}$ , которые наряду с

$$\overset{1}{F}_i^\alpha \overset{1}{F}_\alpha^h = -\delta_i^h, \quad \overset{2}{F}_i^\alpha \overset{2}{F}_\alpha^h = -\delta_i^h \quad (1.1)$$

удовлетворяют условиям

$$\overset{1}{F}_i^\alpha \overset{2}{F}_\alpha^h = \overset{2}{F}_i^\alpha \overset{1}{F}_\alpha^h. \quad (1.2)$$

Отсюда следует, что тензор

$$\overset{3}{F}_i^h = \overset{1}{F}_i^\alpha \overset{2}{F}_\alpha^h,$$

определяет на  $V_n$  структуру почти произведения [7]

$$\overset{3}{F}_i^\alpha \overset{3}{F}_\alpha^h = \delta_i^h. \quad (1.3)$$

Связь между  $\overset{1}{F}$ ,  $\overset{2}{F}$ ,  $\overset{3}{F}$  имеет вид:

$$\begin{aligned} \overset{1}{F}_i^\alpha \overset{2}{F}_\alpha^h &= \overset{2}{F}_i^\alpha \overset{1}{F}_\alpha^h = \overset{3}{F}_i^h, \\ \overset{2}{F}_i^\alpha \overset{3}{F}_\alpha^h &= \overset{3}{F}_i^\alpha \overset{2}{F}_\alpha^h = -\overset{1}{F}_i^h, \\ \overset{3}{F}_i^\alpha \overset{1}{F}_\alpha^h &= \overset{1}{F}_i^\alpha \overset{3}{F}_\alpha^h = -\overset{2}{F}_i^h. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Мы полагаем, что аффиноры  $\overset{1}{F}$ ,  $\overset{2}{F}$ , на  $V_n$  определяют почти эрмитову структуру [3], то есть

$$\overset{1}{F}_{ij} = -\overset{1}{F}_{ji}, \quad \overset{2}{F}_{ij} = -\overset{2}{F}_{ji}, \quad \overset{1}{F}_{ij} = g_{i\alpha} \overset{1}{F}_j^\alpha, \quad \overset{2}{F}_{ij} = g_{i\alpha} \overset{2}{F}_j^\alpha. \quad (1.5)$$

Из (1.4) следует, что

$$\overset{3}{F}_{ij} = \overset{3}{F}_{ji}, \quad \overset{3}{F}_{ij} = g_{i\alpha} \overset{3}{F}_j^\alpha. \quad (1.6)$$

Как обычно, под *келеровой* структурой будем понимать полукватернионную структуру на  $V_n$ , для которой

$$\overset{s}{F}_{i,j}^h = 0, \quad s = 1, 2, 3.$$

Здесь  $\langle, \rangle$  — знак ковариантной производной в  $V_n$ .

Рассмотрим (псевдо-)римановы пространства  $(V_n, g_{ij})$  и  $(\bar{V}_n, \bar{g}_{ij})$  с полукватернионными келеровыми структурами  $\overset{s}{F}, \overset{s}{\bar{F}}, s = 1, 2, 3$ , находящиеся в 4КПО, сохраняющем структуру. Тогда в общей по отображению системе координат  $(x^i)$  при условиях (1.1)-(1.6) имеют место соотношения

$$\bar{\Gamma}_{ij}^h(x) = \Gamma_{ij}^h(x) + \sum_{s=0}^3 \overset{s}{q}_{(i}(x) \overset{s}{F}_{j)}^h(x), \quad (1.7)$$

где

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{F}_i^h &= \delta_i^h, & \overset{3}{F}_i^h &= \overset{1}{F}_i^\alpha \overset{2}{F}_\alpha^h, & \overset{s}{F}_i^h(x) &= \overset{s}{\bar{F}}_i^h(x), \\ \overset{s}{F}_{i,j}^h &= 0, & \overset{s}{F}_{i|j}^h &= 0, & s &= 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (1.8)$$

где  $\overset{s}{q}_i(x)$  — некоторые ковекторы;  $(\cdot, \cdot)$  означает операцию симметрирования по соответствующим индексам;  $\langle, \rangle, \langle | \rangle$  — знаки ковариантной производной в  $V_n$  и  $\bar{V}_n$ , соответственно.

Назовем *4-квазипланарной* линией кривую  $L$  полукватернионного пространства  $(V_n, g_{ij}, \overset{s}{F})$ , заданную в параметрической форме

$$x^h = x^h(t), \quad h = 1, 2, \dots, n,$$

вдоль которой функции  $\lambda^h = \frac{dx^h}{dt}$  удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\frac{d\lambda^h(t)}{dt} + \Gamma_{\alpha\beta}^h(x) \lambda^\alpha(t) \lambda^\beta(t) = \lambda^\alpha \sum_{s=0}^3 \overset{s}{a}(t) \overset{s}{F}_\alpha^h,$$

где  $\overset{s}{a}(t)$  — некоторые функции параметра  $t$ .

Эти кривые представляют собой аналог геодезических линий пространств аффинной связности и аналитически планарных кривых почти комплексных многообразий [7], [2].

Покажем, что образом каждой геодезической в  $(V_n, g_{ij}, \overset{s}{F})$  при 4КПО является 4-квазипланарная кривая в  $(\bar{V}_n, \bar{g}_{ij}, \overset{s}{\bar{F}})$ .

Если  $L$  — геодезическая в  $V_n$  с параметрическими уравнениями

$$x^h = x^h(t), \quad h = 1, 2, \dots, n,$$

то вдоль нее  $\lambda^h = \frac{dx^h}{dt}$  удовлетворяют уравнениям

$$\frac{d\lambda^h(t)}{dt} + \Gamma_{\alpha\beta}^h(x)\lambda^\alpha(t)\lambda^\beta(t) = \rho(t)\lambda^h(t).$$

В общей по 4КПО системе координат  $(x^i)$  кривая  $\bar{L}$  пространства  $\bar{V}_n$ , являющаяся образом кривой  $L$ , определяется теми же параметрическими уравнениями  $x^h = x^h(t)$ ,  $h = 1, 2, \dots, n$ , а соответствующие точки этих кривых имеют одинаковые значения параметра  $t$ . При этом если в дифференциальные уравнения геодезической  $L$  подставить  $\Gamma_{\alpha\beta}^h$  из (1.7), то они примут вид

$$\frac{d\lambda^h(t)}{dt} + \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^h(x)\lambda^\alpha(t)\lambda^\beta(t) = \lambda^\alpha \sum_{s=0}^3 a^s(t) \bar{F}_\alpha^s,$$

то есть  $\bar{L}$  будет 4-квазипланарной в  $\bar{V}_n$ .

Аналогично проверяется, что аналитически планарные и 4-квазипланарные кривые  $V_n$  при 4КПО также переходят в 4-квазипланарные линии  $\bar{V}_n$ .

В [6] мы показали, что из зависимости между ковариантными производными  $\overset{s}{F}$  в  $V_n$  и  $\bar{V}_n$  с учетом (1.1)-(1.8) следует, что

$$\overset{0}{q}_i = \overset{1}{q}_\alpha \overset{1}{F}_i^\alpha = \overset{2}{q}_\alpha \overset{2}{F}_i^\alpha = \overset{3}{q}_\alpha \overset{3}{F}_i^\alpha \quad (1.9)$$

при  $\overset{3}{F}_\alpha^\alpha \neq \pm n$ .

Отметим, что  $\overset{3}{F}_\alpha^\alpha = \pm n$  соответствует  $\overset{3}{F}_i^h = \pm \delta_i^h$  и, следовательно,  $\overset{1}{F}_i^h = \pm \overset{2}{F}_i^h$ , то есть в этом случае полукватернионная келерова структура вырождается в классическую келерову [3].

## 2. СВОЙСТВА ПОЛУКВАТЕРНИОННЫХ КЕЛЕРОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

2.1. Ввиду ковариантного постоянства структурных аффиноров в полукватернионном келеровом пространстве  $(V_n, g_{ij}, \overset{s}{F}_i^h)$  имеют место равенства:

$$\overset{s}{F}_{i,[kl]}^h = 0,$$

откуда с учетом тождества Риччи и (1.1)-(1.5) получаются свойства тензоров Римана и Риччи:

$$R_{\alpha i j k} F_h^1 = -R_{h \alpha j k} F_i^1, \quad R_{\alpha i} F_h^1 = -R_{h \alpha} F_i^1, \quad (2.10)$$

$$R_{\alpha i j k} F_h^2 = -R_{h \alpha j k} F_i^2, \quad R_{\alpha i} F_h^2 = -R_{h \alpha} F_i^2, \quad (2.11)$$

$$R_{\alpha i j k} F_h^3 = R_{h \alpha j k} F_i^3, \quad R_{\alpha i} F_h^3 = R_{h \alpha} F_i^3. \quad (2.12)$$

2.2. Поскольку  $F_{i,j}^3 = 0$ , аффинорная структура  $F_i^h$  интегрируема [7], так что в рассматриваемой окрестности можно выбрать систему координат, называемую *адаптированной* (к аффинору), в которой  $F_i^3$  приводится к виду:

$$(F_i^3) = \begin{pmatrix} E_m & 0 \\ 0 & -E_{n-m} \end{pmatrix}, \quad (2.13)$$

то есть

$$F_b^3 = \delta_b^a, \quad F_B^A = \delta_B^A, \quad F_b^A = F_B^a = 0, \quad (2.14)$$

для  $a, b = 1, 2, \dots, m$ ,  $A, B = m + 1, m + 2, \dots, n$ .

В частности,

$$F_\alpha^3 = 2m - n. \quad (2.15)$$

В [6] мы доказали, что келерово полукватернионное пространство  $(V_n, g_{ij}, F_i^h)$  приводимо, и формулы (1.4)-(1.6), записанные в адаптированной к  $F_i^h$  системе координат, дают нам

$$g_{ab} = g_{ab}(x^c), \quad g_{AB} = g_{AB}(x^C), \quad g_{aB}(x) = 0, \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} F_B^a = F_b^A = 0, & \quad F_B^a = F_b^A = 0, \\ F_b^a = -F_b^A = F_b^a, & \quad F_B^A = F_B^A = F_B^A, \end{aligned} \quad (2.17)$$

причем

$$\begin{aligned} F_C^a F_b^c = -\delta_b^a, & \quad g_{ac} F_b^c = -g_{bc} F_a^c, & \quad F_{b,c}^a = 0, \\ F_C^A F_B^C = -\delta_B^A, & \quad g_{AC} F_B^C = -g_{BC} F_A^C, & \quad F_{B,C}^A = 0. \end{aligned}$$

Это означает, что полукватернионное келерово пространство  $V_n$  представляет собой прямое произведение  $V_n = V_m \times V_{n-m}$ , где пространство  $(V_m(x^a), g_{ab}(x^c))$  является обычным келеровым относительно аффинора  $F_b^a(x^c)$ , а пространство  $(V_{n-m}(x^A), g_{AB}(x^C))$ , соответственно, обычным келеровым относительно аффинора  $F_A^B(x^C)$ .

### 3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ОБЪЕКТЫ, ИНВАРИАНТНЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО 4КПО ПОЛУКВАТЕРНИОННЫХ КЕЛЕРОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

3.1. Рассмотрим полукватернионные келеровы пространства

$$(V_n, g_{ij}, \overset{s}{F}), \quad (\bar{V}_n, \bar{g}_{ij}, \bar{\overset{s}{F}}), \quad s = 1, 2, 3,$$

находящиеся в 4КПО, сохраняющем структуру. При этом полагаем, что наряду с (1.1)-(1.6) в  $\bar{V}_n$  выполняются аналогичные (1.5), (1.6) равенства

$$\begin{aligned} \bar{F}_{ij}^1 &= -\bar{F}_{ji}^1, & \bar{F}_{ij}^2 &= -\bar{F}_{ji}^2, \\ \bar{F}_{ij}^1 &= \bar{g}_{i\alpha}^1 \bar{F}_j^\alpha, & \bar{F}_{ij}^2 &= \bar{g}_{i\alpha}^2 \bar{F}_j^\alpha, \\ \bar{F}_{ij}^3 &= \bar{F}_{ji}^3, & \bar{F}_{ij}^3 &= \bar{g}_{i\alpha}^3 \bar{F}_j^\alpha. \end{aligned}$$

Свертывание основных уравнений 4КПО (1.7) по индексам  $i, j$  с учетом (1.4), (1.9) дает нам

$$2(m+2)\overset{\circ}{q}_i = \bar{\Gamma}_{i\alpha}^\alpha - \Gamma_{i\alpha}^\alpha. \quad (3.18)$$

Отсюда следует, что вектор  $\overset{\circ}{q}_i$  градиентен.

Далее, ввиду (3.18) уравнения (1.7) можно представить в форме

$$\bar{T}_{ij}^h = T_{ij}^h,$$

где

$$T_{ij}^h = \Gamma_{ij}^h - \frac{1}{2(m+2)} \Gamma_{\beta\alpha}^\alpha Q_{ij}^{\beta h}, \quad (3.19)$$

$$Q_{ij}^{kh} = \delta_i^k \delta_j^h - F_i^k F_j^h - F_i^k F_j^h + F_i^k F_j^h. \quad (3.20)$$

Аналогично записываются компоненты  $\bar{T}_{ij}^h$  в  $\bar{V}_n$ .

3.2. На основании (1.7) зависимость между компонентами тензоров Римана полукватернионных келеровых пространств

$$(V_n, g_{ij}, \overset{s}{F}), \quad (\bar{V}_n, \bar{g}_{ij}, \bar{\overset{s}{F}}),$$

находящихся в 4КПО, имеет вид:

$$\bar{R}_{ijk}^h = R_{ijk}^h + q_{\alpha[j} Q_{k]i}^{(h\alpha)}, \quad (3.21)$$

где

$$q_{ij} = \overset{\circ}{q}_{i,j} - \overset{\circ}{q}_\alpha \overset{\circ}{q}_\beta Q_{ij}^{\alpha\beta}, \quad (3.22)$$

$[\cdot, \cdot]$  обозначено альтернирование по соответствующим индексам.

Из градиентности  $\overset{\circ}{q}_i$  очевидно, что  $q_{ij} = q_{ji}$ .



Свертывание (3.21) по индексам  $h, k$  дает нам

$$\bar{R}_{ij} = R_{ij} + (n+4)q_{ij} - 2q_{\alpha\beta}Q_{ij}^{\alpha\beta} + (2m-n)q_{\alpha i}F_j^{\alpha 3}. \quad (3.23)$$

Отсюда с учетом градиентности  $\overset{\circ}{q}_i$  находим, что

$$q_{\alpha i}F_j^{\alpha 3} = q_{\alpha j}F_i^{\alpha 3}$$

и, следовательно,

$$q_{\alpha\beta}F_i^{\alpha 3}F_j^{\beta 3} = q_{ij}, \quad q_{\alpha\beta}F_i^{\alpha 1}F_j^{\beta 1} = q_{\alpha\beta}F_i^{\alpha 2}F_j^{\beta 2}. \quad (3.24)$$

Теперь (3.23) принимают вид

$$\bar{R}_{ij} = R_{ij} + nq_{ij} + 4q_{\alpha\beta}F_i^{\alpha 1}F_j^{\beta 1} + (2m-n)q_{\alpha i}F_j^{\alpha 3}. \quad (3.25)$$

Вычитая из (3.25) результат их свертывания с  $F_k^i F_l^j$  по индексам  $i, j$ , получим

$$(n-4)\left(q_{ij} - q_{\alpha\beta}F_i^{\alpha 1}F_j^{\beta 1}\right) + (2m-n)\left(q_{\alpha j}F_i^{\alpha 3} + q_{\alpha\beta}F_i^{\alpha 2}F_j^{\beta 2}\right) = 0.$$

Аналогично, складывая (3.25), свернутые с  $F_k^i$  по индексу  $i$ , с результатом свертывания (3.25) с  $F_k^i F_l^j$  по индексам  $i, j$ , имеем

$$(2m-n)\left(q_{ij} - q_{\alpha\beta}F_i^{\alpha 1}F_j^{\beta 1}\right) + (n-4)\left(q_{\alpha j}F_i^{\alpha 3} + q_{\alpha\beta}F_i^{\alpha 2}F_j^{\beta 2}\right) = 0.$$

Из двух последних равенств, соответственно, находим

$$q_{ij} = q_{\alpha\beta}F_i^{\alpha 1}F_j^{\beta 1}, \quad q_{\alpha j}F_i^{\alpha 3} = -q_{\alpha\beta}F_i^{\alpha 2}F_j^{\beta 2}, \quad (3.26)$$

при  $m \neq 2, n - m \neq 2$ .

Наконец, (3.25) с учетом (3.26) дают нам

$$(\bar{R}_{\alpha j} - R_{\alpha j}) \left( (n+4)\delta_i^{\alpha} - (2m-n)F_i^{\alpha 3} \right) = 4(m+2)(n-m+2)q_{ij}.$$

На основании полученных соотношений (3.21) можно представить в форме

$$\bar{T}_{ijk}^h = T_{ijk}^h,$$

где

$$T_{ijk}^h = R_{ijk}^h - \tilde{R}_{\alpha[j}Q_{k]i}^{h\alpha} - 2\tilde{R}_{\alpha k} \left( F_i^h F_j^{\alpha} - F_i^h F_j^{\alpha} \right), \quad (3.27)$$

$$\tilde{R}_{ij} = \frac{1}{4(m+2)(n-m+2)} R_{\alpha j} \left( (n+4)\delta_i^{\alpha} - (2m-n)F_i^{\alpha 3} \right) \quad (3.28)$$

при  $m \neq 2, n - m \neq 2$ .

Аналогичным образом представляются в  $\bar{V}_n$  компоненты  $\bar{T}_{ijk}^h$ .  
Нами доказана

**Теорема 3.3.** *Геометрические объекты (3.19) и (3.27) инвариантны относительно 4КПО полукватернионных келеровых пространств.*

Объект (3.19) носит нетензорный характер и является аналогом известных параметров Томаса в теории геодезических отображений римановых пространств [7].

Его сохранение необходимо и достаточно для того, чтобы отображение между полукватернионными келеровыми пространствами было 4-квазипланарным.

Объект (3.27) — аналог тензора Вейля в теории геодезических отображений [7] и тензора голоморфно-проективной кривизны в теории НР-отображений келеровых пространств [1].

Сохранение объекта (3.27) — лишь необходимое условие для того, чтобы рассматриваемое отображение было 4-квазипланарным.

#### 4. 4-КВАЗИПЛОСКИЕ ПОЛУКВАТЕРНИОННЫЕ КЕЛЕРОВЫ ПРОСТРАНСТВА.

4.1. Будем называть полукватернионные келеровы пространства, допускающие 4КПО на плоское пространство, *4-квазиплоскими*. Рассмотрим 4КПО полукватернионного келерова пространства  $(V_n, g_{ij}, \overset{s}{F})$  на плоское  $\bar{V}_n = E_n$ . Тогда из  $\bar{R}_{ijk}^h = 0$  следует  $\bar{T}_{ijk}^h = T_{ijk}^h = 0$  и, значит, (3.27) принимают вид:

$$R_{ijk}^h = \tilde{R}_{\alpha[j} Q_{k]i}^{h\alpha} + 2\tilde{R}_{\alpha k} \left( F_i^h F_j^\alpha - F_i^\alpha F_j^h \right). \quad (4.29)$$

Опуская здесь индекс  $h$  в  $V_n$  и свертывая результат с  $g^{ij}$  по индексам  $i, j$ , с учетом (3.28) получаем:

$$\begin{aligned} 4(n - m^2 + mn)R_{hk} + 4(2m - n)R_{\alpha k} \overset{3}{F}_h^\alpha - \\ - \left( (n + 4)\overset{3}{R} - (2m - n)R \right) \overset{3}{F}_{hk} + \\ + \left( (2m - n)\overset{3}{R} - (n + 4)R \right) g_{hk} = 0, \quad (4.30) \end{aligned}$$

где  $R = R_\alpha^\alpha$  — скалярная кривизна  $V_n$  и  $\overset{3}{R} = R_\beta^\alpha \overset{3}{F}_\alpha^\beta$ .

Исключая из (4.30) и результата их свертывания с  $F_l^h$  по индексу  $h$  слагаемое  $R_{\alpha k} \overset{3}{F}_h^\alpha$ , находим:

$$4m(n-m)R_{hk} = \left(nR - (2m-n)\overset{3}{R}\right)g_{hk} - \left((2m-n)R - n\overset{3}{R}\right)\overset{3}{F}_{hk}. \quad (4.31)$$

Продифференцируем это равенство ковариантно по  $x^l$ :

$$4m(n-m)R_{hk,l} = \left(nR_{,l} - (2m-n)\overset{3}{R}_{,l}\right)g_{hk} - \left((2m-n)R_{,l} - n\overset{3}{R}_{,l}\right)\overset{3}{F}_{hk}. \quad (4.32)$$

Сравнивая результат поочередного свертывания (4.32) с  $g^{hl}$  и  $\overset{3}{F}^{hl}$  по индексам  $h, l$ , обнаруживаем, что  $R_{,k} = 0$  и  $\overset{3}{R}_{,l} = 0$ , то есть  $R$  и  $\overset{3}{R}$  — константы.

Учитывая вышесказанное, из (4.31) и (3.28) получаем

$$\tilde{R}_{hk} = \left(C_1R - C_2\overset{3}{R}\right)g_{hk} - \left(C_2R - C_1\overset{3}{R}\right)\overset{3}{F}_{hk}, \quad (4.33)$$

где

$$C_1 = \frac{n^2 + 2n + 2m^2 - 2mn}{8m(n-m)(m+2)(n-m+2)},$$

$$C_2 = \frac{(2m-n)(n+2)}{8m(n-m)(m+2)(n-m+2)}$$

— константы при  $m \neq 2, n - m \neq 2$ .

Нами доказана

**Теорема 4.2.** *Тензор Римана 4-квазиплоского полукватернионного келлерова пространства  $(V_n, g_{ij}, \overset{s}{F})$  по необходимости имеет структуру*

$$R_{ijk}^h = \tilde{R}_{\alpha[j} Q_{k]i}^{h\alpha} + 2\tilde{R}_{\alpha k} \left(F_i^h F_j^\alpha - F_i^{\overset{2}{h}} F_j^{\overset{2}{\alpha}}\right),$$

$$\tilde{R}_{hk} = \left(C_1R - C_2\overset{3}{R}\right)g_{hk} - \left(C_2R - C_1\overset{3}{R}\right)\overset{3}{F}_{hk},$$

где

$$C_1 = \frac{n^2 + 2n + 2m^2 - 2mn}{8m(n-m)(m+2)(n-m+2)},$$

$$C_2 = \frac{(2m-n)(n+2)}{8m(n-m)(m+2)(n-m+2)}$$

— константы при  $m \neq 2, n - m \neq 2$ .

4.3. Если  $V_n$  — 4-квазиплоское полукватернионное пространство, то, в соответствии с теоремой 4.2, его тензор Римана имеет структуру (4.29), (4.33). Подставляя эти соотношения в выражение (3.27) для  $T_{ijk}^h$ , получаем что в  $V_n$  имеет место  $T_{ijk}^h = 0$ .

Пусть полукватернионное келерово пространство  $(V_n, g_{ij}, \overset{s}{F})$  допускает 4КПО на 4-квазиплоское полукватернионное келерово  $(\bar{V}_n, \bar{g}_{ij}, \overset{s}{F})$ . Тогда в  $\bar{V}_n$  тензор Римана имеет структуру, указанную в (4.29), (4.33) и, следовательно,  $\bar{T}_{ijk}^h = 0$ . В силу инвариантности,  $T_{ijk}^h = \bar{T}_{ijk}^h = 0$  в  $V_n$ . Отсюда, в свою очередь, вытекают (4.29), (4.33).

Таким образом, справедлива

**Теорема 4.4.** *Если полукватернионное келерово пространство*

$$(V_n, g_{ij}, \overset{s}{F})$$

*допускает 4КПО на 4-квазиплоское полукватернионное келерово*

$$(\bar{V}_n, \bar{g}_{ij}, \overset{s}{F}),$$

*то тензор Римана  $V_n$  по необходимости удовлетворяет (4.29), (4.33).*

Эта теорема по сути говорит о том, что класс полукватернионных келеровых пространств, тензор Римана которых имеет структуру (4.29), (4.33), замкнут относительно 4КПО.

4.5. Естественно возникает вопрос о том, допускает ли полукватернионное келерово пространство  $V_n$ , в котором имеют место (4.29), (4.33), нетривиальное 4КПО.

Предположим, что 4-квазиплоское полукватернионное келерово пространство  $(V_n, g_{ij}, \overset{s}{F})$  нам задано. Если существует полукватернионное келерово относительно той же аффинорной структуры пространство  $\bar{V}_n$  с метрическим тензором  $\bar{g}_{ij}(x)$ , на которое пространство  $V_n$  допускает 4КПО соответствующее вектору  $\overset{\circ}{q}_i \neq 0$ , то, ввиду инвариантности  $T_{ijk}^h$ , имеем  $T_{ijk}^h = \bar{T}_{ijk}^h = 0$ . Тогда после свертывания (3.27) по  $h, k$  ввиду (3.22), (4.31), (4.33) следует, что

$$\overset{\circ}{q}_{i,j} - \overset{\circ}{q}_\alpha \overset{\circ}{q}_\beta Q_{ij}^{\alpha\beta} = (\bar{r}_1 \bar{g}_{ij} - r_1 g_{ij}) + (\bar{r}_2 \overset{3}{F}_{ij} - r_2 \overset{3}{F}_{ij}), \quad (4.34)$$

где  $\bar{r}_1, \bar{r}_2, r_1, r_2$  — некоторые константы.

Далее, ввиду (1.1)-(1.6), (1.8) и (1.9) основные уравнения 4КПО (1.7) можно представить в эквивалентной форме:

$$\bar{g}_{ij,k} = 2\overset{\circ}{q}_k \bar{g}_{ij} + 2\overset{\circ}{q}_\alpha F_k^\alpha \bar{F}_{ij}^3 + \overset{\circ}{q}_\alpha \bar{g}_{\beta k} Q_{(ij)}^{\alpha\beta}. \quad (4.35)$$

Совокупность уравнений (4.34), (4.35) образует систему Коши в ковариантных производных первого порядка в  $V_n$  относительно  $\bar{g}_{ij}(x)$  и  $\overset{\circ}{q}_k$ . Кроме этого в  $\bar{V}_n$  мы также должны требовать выполнения условий

$$\begin{aligned} \bar{g}_{i\alpha} F_j^\alpha + \bar{g}_{j\alpha} F_i^\alpha &= 0, \\ \bar{g}_{i\alpha} F_j^\alpha + \bar{g}_{j\alpha} F_i^\alpha &= 0, \\ \bar{g}_{i\alpha} F_j^\alpha - \bar{g}_{j\alpha} F_i^\alpha &= 0. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Исследуем смешанную систему (4.34), (4.35), (4.36) в  $V_n$ . Заметим, что при этих условиях в  $\bar{V}_n$  автоматически следует  $F_{k|l}^i \equiv 0$ . Существование решения

$$\bar{g}_{ij}(x) \equiv \bar{g}_{ji}(x), \quad (\det \|\bar{g}_{ij}\| \neq 0), \quad \overset{\circ}{q}_k(x) \neq 0 \quad (4.37)$$

системы уравнений (4.34), (4.35), (4.36) в 4-квазиплоском полукватернионном келеровом пространстве  $V_n$  необходимо и достаточно, чтобы это пространство допускало 4КПО.

Условия интегрируемости (4.34) и (4.35) имеют вид:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{q}_\alpha R_{ijk}^\alpha - \overset{\circ}{q}_{\alpha,k} \overset{\circ}{q}_\beta Q_{ij}^{\alpha\beta} - \overset{\circ}{q}_\alpha \overset{\circ}{q}_{\beta,k} Q_{ij}^{\alpha\beta} = \\ + \overset{\circ}{q}_{\alpha,j} \overset{\circ}{q}_\beta Q_{ik}^{\alpha\beta} + \overset{\circ}{q}_\alpha \overset{\circ}{q}_{\beta,j} Q_{ik}^{\alpha\beta} = \bar{g}_{\alpha[j,k]} \left( \bar{r}_1 \delta_i^\alpha + \bar{r}_2 F_i^\alpha \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{g}_{\alpha j} R_{ikl}^\alpha + \bar{g}_{i\alpha} R_{jkl}^\alpha = 2\bar{g}_{ij,[l} \overset{\circ}{q}_{k]} + 2\overset{\circ}{q}_{\alpha,[l} F_{k]}^\alpha \bar{F}_{ij}^3 + \\ + 2F_j^{\beta} \bar{g}_{\beta i,[l} F_{k]}^\alpha \overset{\circ}{q}_\alpha + \overset{\circ}{q}_{\alpha,[l} \bar{g}_{k]\beta} Q_{(ij)}^{\alpha\beta} + \overset{\circ}{q}_\alpha \bar{g}_{\beta[k,l]} Q_{(ij)}^{\alpha\beta} \end{aligned}$$

Ввиду (4.29), (4.33), (4.34), (4.35), эти условия интегрируемости выполняются тождественно.

Дифференцируя ковариантно в  $V_n$  (4.36) и используя (4.35), убеждаемся, что первое дифференциальное продолжение условий (4.37) выполняется.

Из вышесказанного и из теории дифференциальных уравнений следует, что смешанная система уравнений (4.34), (4.35), (4.36) имеет в 4-квазиплоском полукватернионном келеровом пространстве  $V_n$  решение

для любых начальных значений искомых функций (4.37), удовлетворяющих в точке  $M_0$  условиям (4.36).

Итак, нами доказана

**Теорема 4.6.** *Любое 4-квазиплоское полукватернионное келерово пространство допускает нетривиальные 4КПО.*

Две последние теоремы представляют собой аналог теоремы Бельтрами в теории геодезических отображений римановых пространств.

## 5. СТРОЕНИЕ 4-КВАЗИПЛОСКИХ ПОЛУКВАТЕРНИОННЫХ КЕЛЕРОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

Рассмотрим тензор Римана 4-квазиплоского полукватернионного келерова пространства

$$R_{ijk}^h = \tilde{R}_{\alpha[j} Q_{k]i}^{h\alpha} + 2\tilde{R}_{\alpha k} \left( \overset{1}{F}_i^h \overset{1}{F}_j^\alpha - \overset{2}{F}_i^h \overset{2}{F}_j^\alpha \right),$$

$$\tilde{R}_{hk} = \left( C_1 R - C_2 \overset{3}{R} \right) g_{hk} - \left( C_2 R - C_1 \overset{3}{R} \right) \overset{3}{F}_{hk}$$

в адаптированной к аффинору  $\overset{3}{F}$  системе координат. Тогда, как указывалось ранее, имеем

$$\left( \overset{3}{F}_i^h \right) = \begin{pmatrix} E_m & 0 \\ 0 & -E_{n-m} \end{pmatrix},$$

$$\overset{3}{F}_b^a = \delta_b^a, \quad \overset{3}{F}_B^A = \delta_B^A, \quad \overset{3}{F}_b^A = \overset{3}{F}_B^a = 0,$$

$$g_{ab} = g_{ab}(x^c), \quad g_{AB} = g_{AB}(x^C), \quad g_{aB}(x) = 0,$$

$$\overset{1}{F}_B^a = \overset{1}{F}_b^A = 0, \quad \overset{2}{F}_B^a = \overset{2}{F}_b^A = 0,$$

$$\overset{2}{F}_b^a = -\overset{1}{F}_b^a = F_b^a, \quad \overset{2}{F}_B^A = \overset{1}{F}_B^A = F_B^A,$$

$$F_c^a F_b^c = -\delta_b^a, \quad g_{ac} F_b^c = -g_{bc} F_a^c, \quad F_{b,c}^a = 0,$$

$$F_C^A F_B^C = -\delta_B^A, \quad g_{AC} F_B^C = -g_{BC} F_A^C, \quad F_{B,C}^A = 0,$$

где  $a, b = 1, 2, \dots, m$ ,  $A, B = m+1, m+2, \dots, n$ .

Учитывая все это, при  $h = a, i = b, j = c, k = d$  получим, что

$$R_{bcd}^a = C_3 \left( \delta_{[c}^a g_{d]b} + \overset{1}{F}_{[c}^a \overset{1}{F}_{d]b} + 2\overset{1}{F}_b^a \overset{1}{F}_{cd} \right), \quad (5.38)$$

а при  $h = A, i = B, j = C, k = D$  — что

$$R_{BCD}^A = C_4 \left( \delta_{[C}^A g_{D]B} + \overset{1}{F}_{[c}^a \overset{1}{F}_{d]b} + 2\overset{1}{F}_B^A \overset{1}{F}_{cd} \right), \quad (5.39)$$

где  $C_3, C_4$  — некоторые константы. Остальные компоненты тензора Римана равны нулю.

Соотношения (5.38) свидетельствуют о том, что компонента  $V_m$  представляет собой классическое келерово пространство постоянной голоморфной кривизны [1] относительно аффинора  $\overset{1}{F}_b^a(x^c)$ .

Аналогично (5.39) говорит о том, что компонента  $V_{n-m}$  представляет собой классическое келерово пространство постоянной голоморфной кривизны относительно аффинора  $\overset{1}{F}_B^A(x^C)$ .

Нами доказана

**Теорема 5.1.** *4-квазиплоское полукватернионное келерово пространство  $(V_n, g_{ij}(x^i), \overset{s}{F}(x^i))$  есть прямое произведение  $V_n = V_m \times V_{n-m}$ , где  $(V_m(x^a), g_{ab}(x^c), \overset{1}{F}_b^a(x^c))$  является келеровым относительно аффинора  $\overset{1}{F}_b^a(x^c)$  пространством постоянной голоморфной кривизны, а  $(V_{n-m}(x^A), g_{AB}(x^C), \overset{1}{F}_A^B(x^C))$  — соответственно, келеровым относительно аффинора  $\overset{1}{F}_A^B(x^C)$  пространством постоянной голоморфной кривизны.*

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей статье мы решаем задачи, традиционные для любого типа отображений аффинносвязных и римановых пространств, а именно, построение геометрических объектов, инвариантных относительно рассматриваемых отображений, и нахождение классов пространств, их допускающих.

Мы построили геометрические объекты, инвариантные относительно 4-квазипланарных отображений полукватернионных келеровых пространств.

Один из них  $T_{ij}^h$  носит нетензорный характер (типа проективных параметров Томаса в теории геодезических отображений римановых пространств), в чем состоит неудобство его применения. Сохранение этого объекта является необходимым и достаточным условием того, чтобы отображение одного полукватернионного келерова пространства на другое было 4-квазипланарным.

Другой объект  $T_{ijk}^h$  — тензорный (типа тензора Вейля в теории геодезических отображений римановых пространств или тензора голоморфно-проективной кривизны в теории голоморфно-проективных отображений келеровых пространств). Его сохранение является лишь необходимым условием того, чтобы соответствие между двумя полукватернионными келеровыми пространствами было 4-квазипланарным.

Мы выделили класс пространств, названных 4-квазиплоскими, которые допускают 4-квазипланарное отображение на плоское пространство. С помощью объекта  $T_{ijk}^h$  получен внутренний тензорный признак этих пространств и доказано, что любое 4-квазиплоское пространство допускает нетривиальные 4-квазипланарные отображения на другие 4-квазиплоские пространства (это аналог теоремы Бельтрами из теории геодезических отображений римановых пространств).

Показано, что 4-квазиплоское пространство представляет собою прямое произведение двух келеровых пространств постоянной голоморфной кривизны.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] J. Mikeš, A. Vanžurová, I. Hinterleitner. *Geodesic mappings and some generalizations*. Olomouc: Palacký University, Faculty of Science, 2009.
- [2] T. Otsuki, Y. Tashiro. On curves in kaehlerian spaces. *J. Okayama Univ.*, 4:57–78, 1954.
- [3] Д. В. Беклемишев. Дифференциальная геометрия пространств с почти комплексной структурой. In *Итоги науки: Геометрия*, pages 165–212. М.: ВИНТИ, 1965.
- [4] И. Н. Курбатова. О 4-квазипланарных отображениях почти кватернионных многообразий. *Известия ВУЗов. Математика.*, (1):75–78, 1986.
- [5] И. Н. Курбатова. О диффеоморфизмах почти кватернионных многообразий. *Мат. Студії*, 40(1):95–103, 2013.
- [6] И. Н. Курбатова. 4-квазипланарные отображения почти кватернионных и полукватернионных многообразий. *Труды международного геометрического центра*, 8(1):63–73, 2015.
- [7] Н. С. Синюков. *Геодезические отображения римановых пространств*. М.: Наука, 1979.

*Поступило в редакцию 28 марта 2016, принято к печати 12 мая 2016.*

Ирина Николаевна Курбатова

ОНУ, ОДЕССА, УКРАИНА

*Email:* irina.kurbatova27@gmail.com



Для нотаток

Друк: підприємець Голіней О. М.  
м. Івано-Франківськ, вул. Галицька, 128  
тел. (0342) 58 04 32, +38 050 540 30 64  
папір офсетний, друк цифровий  
формат 70x100/16, ум. друк. 3,72 арк.  
Зам. № 284 від 17.10.2016, наклад 300 прим.

# Contents

<b>One-dimensional foliations on topological manifolds</b>	1
S. Maksymenko, E. Polulyakh	
<b>Triples of infinite iterations of hyperspaces of max-plus compact convex sets</b>	24
A. Savchenko, M. Zarichnyi	
<b>Топологія потоків Морса-Смейла з особливостями на межі двовимірного диска</b>	32
М. В. Лосєва, О. О. Пришляк	
<b>О поверхностях пространства Минковского со стационарными значениями кривизны грасманова образа</b>	42
М. А. Гречнева, П. Г. Стеганцева	
<b>О 4-квазипланарных отображениях полукватернионных келеровых многообразий</b>	49
И. Н. Курбатова	

