Proceedings

of the

INTERNATIONAL GEOMETRY CENTER

Volume 9, No. 3-4, 2016

ISSN print: 2072-9812
ISSN online: 2409-8906
ISO 26324:2012

http://www.geometry-center.com

PROCEEDINGS OF THE INTERNATIONAL GEOMETRY CENTER

The journal is focusing on coverage of the most important problems in mathematics and its applications, particularly in differential geometry, topology, mathematical physics and dynamical systems. It publishes peer reviewed original papers and surveys especially on the following topics: algebraic and analytical methods in geometry; differential geometry as a whole; geometry and topology of differentiable manifolds; general and algebraic topology; geometric and topological methods in the natural sciences; application of geometric methods to modern problems of continuum mechanics, control theory, and mathematical physics; history and methods of teaching mathematics.

Manuscripts are accepted for review with the understanding that the same work is not already published, is not under consideration for publication elsewhere, and that its submission for publication has been approved by all of the coauthors.

Papers are published in Ukrainian, English and Russian.

Journal conducts active cooperation with the following World abstracting and indexing databases: Vernadsky National Library of Ukraine, CrossRef, eLibrary.ru, Index Copernicus International, Google Scholar, Directory of Open Access scholarly Resources (ROAD), Open Academic Journals Index (OAJI), EBSCOhost, Directory Indexing of International Research Journals - Citefactor, WorldCat, Bielefeld Academic Search Engine (BASE), ResearchBib, Ulrich's Periodicals Directory, Directory of Open Access Journals (DOAJ).

Publisher: ONAFT, Odesa, Kanatna str., Ukraine, 65039.

Web page: *http://www.geometry-center.com*

Emails: *proceedings.igc@gmail.com*, *geom-odessa@ukr.net*

Technical support: ONAFT Coordinating Center of Scientific Journals' Publishing.

ПРАЦІ МІЖНАРОДНОГО ГЕОМЕТРИЧНОГО ЦЕНТРУ

Метою видання журналу «Праці міжнародного геометричного центру» є консолідація та підтримка досліджень з геометрії, топології та динамічних систем. Тематична спрямованість журналу пов'язана з висвітленням найбільш важливих та актуальних проблем у галузі математики та її застосувань, зокрема у диференціальній геометрії, топології, математичній фізиці та динамічних системах.

Публікація статей здійснюється за такими напрямками: алгебраїчні методи в геометрії; диференціальна геометрія у цілому; геометрія та топологія диференційованих многовидів; загальна й алгебраїчна топологія; геометричні й топологічні методи у природничих науках; застосування геометричних методів до сучасних задач механіки суцільних середовищ, теорії управління та математичної фізики; історія й методика викладання математики.

До розгляду приймаються лише статті, які є оригінальними роботами авторів, не були опубліковані та не перебувають на розгляді до публікації в інших виданнях.

Роботи публікуються українською, англійською та російською мовами.

Журнал індексується такими світовими базами індексування та реферування: Національна бібліотека України імені Вернадського, CrossRef, eLibrary.ru, Index Copernicus International, Google Scholar, Directory of Open Access scholarly Resources (ROAD), Open Academic Journals Index (OAJI), EBSCOhost, Directory Indexing of International Research Journals - Citefactor, WorldCat, Bielefeld Academic Search Engine (BASE), ResearchBib, Ulrich's Periodicals Directory, Directory of Open Access Journals (DOAJ).

Видавник: ОНАХТ, вул. Канатна, 112, м. Одеса, Україна, 65039.

Веб-сторінка журналу: *http://www.geometry-center.com*

Електронні адреси: *proceedings.igc@gmail.com*, *geom-odessa@ukr.net*

Технічна підтримка: Координаційний центр видання наукової періодики ОНАХТ.

Рекомендовано до друку та розташування в мережі Інтернет Вченою Радою ОНАХТ 07.02.2017, протокол №12.

Зареєстровано Міністерством юстиції України. Свідоцтво: Серія КВ № 13819 - 2793Р від 19.11.2007.

Видається з 2008 року, виходить 4 рази на рік.

Кузаконь Віктор Михайлович

16 березня 2016 року на 68 році життя зупинилося серце відомої в світі людини, видатного математика, гарного організатора та чудового керівника, завідувача кафедри вищої математики ОНАХТ, директора благодійного фонду наукових досліджень «Наука», відповідального редактора наукового журналу «Праці міжнародного геометричного центру», голови оргкомітету міжнародної конференції «Геометрія в Одесі» Кузаконя Віктора Михайловича.

В Одеській національній академії харчових технологій мало хто не знав чи не чув про енергійного, веселого і талановитого математика та мало хто знає про життєвий шлях Віктора Михайловича, який не завжди був легким і простим, шлях від інженера до почесного доцента академії, «Заслуженого працівника освіти України».

Віктор Михайлович Кузаконь народився 31 серпня 1947 року в місті Кандалакша Мурманської області в родині військовослужбовця. У 1970 закінчив механіко-математичний факультет Одеського державного університету ім. І. І. Мечнікова за фахом «математика». З 1970 по 1972 роки проходив військову службу в лавах радянської армії, потім працював інженером і старшим інженером науково-дослідного відділу Одеського вищого інженерно-морського училища.

У 1972 році перейшов на роботу асистентом кафедри вищої математики Одеського технологічного інституту ім. М. В. Ломоносова (нині ОНАХТ), де і пропрацював до кінця своїх днів. Багато зусиль віддавав викладацькій роботі. Ним написано і опубліковано ряд навчальних посібників, збірник задач, методичні вказівки та ін. За відгуками студентів його лекції надовго запам'яталися своєю простотою і доступністю. Віктор Михайлович завжди знаходив час для допомоги студентам у навчанні, для поради в житті.

З 1974 по 1976 роки В. М. Кузаконь навчався в аспірантурі за спеціальністю «Геометрія та топологія» під науковим керівництвом доцента М. О. Рахули. Кандидатська дисертація на тему «Диференціальні інваріанти розшарування ріманових многовидів зі зв'язністю та їх симетрії» захищена в Московському державному педагогічному університеті ім. В. І. Леніна.

В. М. Кузаконь – послідовник наукових шкіл професорів В. В. Личагіна і М. О. Рахули. Основний напрямок його наукової діяльності – теорія диференціальних інваріантів. Його дослідження знайшли відображення у великій кількості статей, доповідей та монографії.

Віктор Михайлович вніс великий вклад в організацію наукових геометричних конференцій в Одесі. У період з 2004 року він очолював організаційний комітет міжнародних конференцій «Геометрія в Одесі». В. М. Кузаконь був президентом благодійного фонду наукових досліджень «Наука» та членом ради Міжнародного геометричного центру.

В 2007 році Віктор Михайлович став відповідальним редактором наукового журналу «Праці міжнародного геометричного центру».

Ентузіазм та активність Віктора Михайловича притягували у науковому світі інтерес відомих геометрів. Колеги згадують його виступи, що залучали до найсучасніших ідей і досягнень геометрії, в служінні якої він виявляв зразок для наслідування.

З 2010 року Віктор Михайлович завідував кафедрою вищої математики в Одеській національній академії харчових технологій. Лекції для студентів читались із захопленим блиском, супроводжувалися потужною мотивацією та викликати в них оптимізм і бажання досягати більшого.

Протягом багатьох років Віктор Михайлович очолював одеську міську організацію Української республіканської партії «Собор», брав активну участь у виборах до органів влади.

В. М. Кузаконь завжди був поціновувачем усього прекрасного, захоплювався філософією, психологією, поезією. Сам писав ліричні та філософські вірші.

Друзі, колеги знали і завжди згадують про улюблені дві пісні, які любив співати Віктор Михайлович: «Скрипка грає» на вірші Юрія Рибчинського та «Есть только миг» на вірші Леоніда Дербеньова, які підкреслюють, як романтизм, так і спрямованість його особистості.

Він з честю пройшов свій земний шлях і в наших серцях назавжди залишиться мудрим Вчителем, великим Патріотом і достойним Громадянином. Світла пам'ять залишиться надовго в душах колег, учнів і друзів.

Редакційна колегія журналу

Вибрані математичні роботи В. М. Кузаконя

1. В. М. Кузаконь, М. О. Рахула, *Инварианты расслоения локально-евклидовой поверхности* // Украинский геометрический сборник. – 1978. – №21. – С. 44-50.
2. В. М. Кузаконь, *Інваріанти сім'ї поверхонь в евклідовому просторі* // Вісник Київського університету. – 1979. – №21. – С. 58-61.
3. В. М. Кузаконь, С. С. Москалюк, *Тензорные инварианты отображений многообразий со связностями* // АНУ Итф-93-20 Р, Киев, 1993. – 25 с. – (Препр. АН Украины ИТФ 93-20Р).
4. В. М. Кузаконь, С. С. Москалюк, *Контактные симметрии дифференциальных инвариантов субмерсий локально-евклидовых многообразий* // АНУ Итф-93-22 Р, Киев, 1993. – 20 с. – (Препр. АН Украины ИТФ 93-22Р).
5. В. М. Кузаконь, С. С. Москалюк, *Дифференциальные инварианты субмерсий локально-евклидовых многообразий* // АНУ Итф-94-28З Киев, 1994. – 12 с. – (Препр. АН Украины ИТФ 94-28Р).
6. V. M. Kuzakon, *Generalized fiber bundles with connection.* International Symposium on Mathematical and Theoretical Physics. Ukrainian Journal of Physics. – 1998. – V. 43, № 6-7. – P. 814-816.
7. В. М. Кузаконь, *Диференціальні інваріанти субмерсій многовидів* // Вісник Державного університету «Львівська політехніка». Серія: Прикладна математика. – 1999. – № 364. – С. 295-298.
8. В. М. Кузаконь, *Тензорные инварианты сечений субмерсий с дополнительными структурами* // Математичні студії. – 2002. – Т. 17, № 2. – С. 199-210.
9. В. М. Кузаконь, *Обобщеные расслоения для семейства групп Ли.* // Движения в обобщенных пространствах. Межвузовский сборник научных трудов Пенз. гос. пед. ун-та. – 2002. – С. 126-133.
10. В. Кузаконь, О. Мельник, В. Прокіп, *Про один клас дільників багаточленних матриць над полем* // Вісник львівського університету. Серія прикладна математика та інформатика. – 2002. – вип. 5. – С. 39-44.
11. В. М. Кузаконь, *Обобщенные расслоенные пространства* Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2002. – Т. 45, № 2. – С.58-63.
12. В. М. Кузаконь, *Контактные симметрии дифференциальных инваринтов семейства кривих* Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. – 2004. – вип. 4. – С. 31-35
13. В. М. Кузаконь, *Вычисление дифференциальных инвариантов второго порядка субмерсий евклидовых пространств* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2005. – Т. 48, № 4. – С. 95-99.
14. В. М. Кузаконь, *Контактные симметрии гауссовой кривизны семейства поверхностей* // Движения в обобщенных пространствах. ПГПУ им. В. Т. Белинского. – Пенза, 2005. – С. 35-42.

15. В. М. Кузаконь, *Метрические дифференциальные инварианты расслоения кривых на плоскости* // Збірник праць Ін-ту математики НАН України. – Київ, 2006. – Т. 3, № 3. – С. 201-212.
16. В. М. Кузаконь, И. С. Стрельцова, *Дифференциальные инварианты расслоений кривых на плоскости Минковского* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – Т. 43, № 1. – С. 49-54.
17. V. Kuzakon, S. Moskaliuk, *Tensor invariants of the maps of manifolds with higher-order connectivities* // Hadronic J. 30 (2007), no. 4, 355–375.
18. I. Honcharuk, V. Kuzakon, S. Moskaliuk, *Basis of differential invariants for submersions* $\phi(\Gamma) : V_n \to V_1$ // Hadronic J. 30 (2007), no. 3, 221–232.
19. В. М. Кузаконь, *Диференціальні розшарування кривих на площині відносно R-конформної метричної групи* // Прикладні проблеми механіки і математики: наук. зб. – Львів., 2008. – Вип. 6. – С. 61-65.
20. В. Ф. Кириченко, В. М. Кузаконь, К. М. Тенюх, *Обобщенные классы Грея-Хервеллы и голоморфные геодезические преобразования обобщенных почти эрмитовых структур* // Proc. Intern. Geom. Center. – 2008. - V. 1, №1-2. – С. 23-39.
21. В. М. Кузаконь, *Дифференциальные инварианты расслоений кривых на плоскости Лобачевского* // Збірник праць Ін-ту математики НАН України – Київ, 2009. – Т. 6, № 2. – С. 82-90.
22. В.М.Кузаконь, *Дифференциальные инварианты слоений* // Доповіді НАН України. - 2009. - № 4. – С. 25-27.
23. В. М. Кузаконь, Є. В. Черевко, *Конформно-келерові простори та конформні перетворення тензору енергії-імпульсу* // Proc. Inter. Geom. Center. – 2011. – V. 4, № 4. – P. 20-26.
24. В. М. Кузаконь, Ю. С. Федченко, *Симметрии дифференциальных инвариантов семейства поверхностей* // Proc. Inter. Geom. Center. – 2011. – V. 4, № 3. – С. 22-29.
25. В. Ф. Кириченко, В. М. Кузаконь, *Обобщенные классы Грея-Хервеллы и голоморфные геодезические преобразования обобщенных почти эрмитовых структур* // Proc. Inter. Geom. Center. – 2011. – V. 4, № 2. – P. 26-35.
26. В. Ф. Кириченко, В. М. Кузаконь, О. О. Пришляк, *Гладкі многовиди. Геометричні та топологічні аспекти.* // Праці Ін-ту математики НАН України. Математика та її застосування. – Київ, 2013. – Т. 97. – 500 с.
27. В. М. Кузаконь, А. М. Шелехов, *О структуре обобщенных главных расслоений* // Доповіді НАН України. – 2013. – № 6. – С. 19-22.
28. В. М. Кузаконь, А. М. Шелехов, *K-обобщенные G-структуры* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – Львів. 2012. – Т. 55, № 3. – С. 44-48.
29. В. Ф. Кириченко, В. М. Кузаконь, *О геометрии голоморфных торсообразующих векторных полей на почти эрмитовых многообразиях* // Укр. мат. журн. – 2013. – Т. 65, № 7. – С. 1005-1008
30. В. М. Кузаконь, *Обобщенные структуры, связанные с деформацией группы Ли* // Proc. Inter. Geom. Center. – 2012. – V. 5, № 3-4. – С. 46-49.
31. В. М. Кузаконь, А. М. Шелехов, *Инварианты гладких слоений* // Известия высших учебных заведений. Физ.-мат. науки. Математика. – 2013. – вып. 4(28). – С. 71-81.
32. V. M. Kuzakon, A. M. Shelekhov, *Local invariants of smooth foliations* // Mathematical Modelling and Geometry. – 2014. – V. 2, № 3. – P. 48-59.
33. В. М. Кузаконь, *О голоморфности торсообразующих векторных полей на почти эрмитовых многообразиях* // Укр. мат. журн. – 2015. – Т. 67, № 3. – С. 427-430.

Proceedings of the
International Geometry Center
Vol. 9, no. 3-4 (2016) pp. 5–16

A new curvature-like tensor in an almost contact Riemannian manifold

Koji Matsumoto

Memories of Professor Victor Kuzakon at ONAFT

Abstract. In a M. Prvanović's paper [5], we can find a new curvature-like tensor in an almost Hermitian manifold.

In this paper, we define a new curvature-like tensor, named contact holomorphic Riemannian, briefly (CHR), curvature tensor in an almost contact Riemannian manifold. Then, using this tensor, we mainly research (CHR)-curvature tensor in a Kenmotsu and a Sasakian manifold. We introduce the flatness of a (CHR)-curvature tensor and show that a Kenmotsu and a Sasakian manifold with a flat (CHR)-curvature tensor is flat, see Theorems 3.1 and 4.1. Next, we introduce the notion of an (CHR)-η-Einstein in an almost contact Riemannian manifold. In particular, in a Sasakian or a Kenmotsu manifold, a (CHR)-η-Einstein manifold is η-Einstein, see Theorem 5.3. Finally, from this tensor, we introduce a notion of a (CHR)-space form in an almost contact Riemannian manifold. In particular, if a Kenmotsu and a Sasakian manifold are (CHR)-space form, then the (CHR)-curvature tensor satisfies a special equation, see Theorems 6.2 and 7.1.

1. Almost contact Riemannian manifolds

A real $(2n+1)$-dimensional differentiable Riemannian manifold (M, g) is said to be an almost contact Riemannian manifold if it has a $(1,1)$-tensor φ and a 1-form η which satisfy [6]

$$\begin{gathered} \varphi^2 = -I + \eta \otimes \xi, \qquad \eta(\varphi X) = 0, \qquad \eta(\xi) = 1, \\ g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y), \end{gathered} \tag{1.1}$$

for any $Y, X \in TM$, where ξ is defined by $g(\xi, X) = \eta(X)$, and TM is the tangent bundle of M. From $(1.1)_2$ the vector field ξ is a unit vector field

2010 Mathematics Subject Classification: 53C40

Keywords: curvature-like tensor, almost contact Riemannian manifold, Kenmotsu manifold, Sasakian manifold, Sasakian space form, contact holomorphic Riemannian curvature tensor

and we call it the *structure vector field* of the almost contact Riemannian manifold. Next, in an almost contact Riemannian manifold M, we define a 2-form F as $F(X,Y) = g(\varphi X, Y)$ for any $X, Y \in TM$. Then the 2-form F is skew-symmetric and we call it the *fundamental* 2*-form* of this almost contact Riemannian manifold.

In an almost contact Riemannian manifold a 2-dimensional distribution spanned by a unit vector field X and φX is called a φ*-section* of X. The sectional curvature $R(X, \varphi X, \varphi X, X)$ is said to be the φ*-holomorphic sectional curvature of* X, where R denotes the Riemannian curvature tensor with respect to g.

An almost contact Riemannian manifold (M, φ, g, ξ) is called a *Kenmotsu manifold*, [1], [2], [3], if the structure tensors satisfy

$$\begin{aligned}(\nabla_X \varphi)Y &= -\eta(Y)\varphi X - g(X, \varphi Y)\xi,\\ \nabla_X \xi &= X - \eta(X)\xi,\end{aligned}$$

for any $X, Y \in TM$, where ∇ means the covariant derivation with respect to g. In a Kenmotsu manifold (M, φ, g, ξ) we know

$$\begin{aligned}(\nabla_X \eta)Y &= g(\varphi X, \varphi Y),\\ \eta(R(X,Y)Z) &= \eta(Y)g(X,Z) - \eta(X)g(Y,Z),\\ R(X,Y)\xi &= \eta(X)Y - \eta(Y)X,\\ R(\xi, X)Y &= \eta(Y)X - g(X,Y)\xi,\\ R_1(\varphi X, \varphi Y) &= R_1(X,Y) + 2n\eta(X)\eta(Y),\\ R_1(X, \xi) &= -2n\eta(X),\end{aligned} \tag{1.2}$$

for any $X, Y, Z, W \in TM$, where R_1 denotes the Ricci tensor with respect to g.

Moreover, in a Kenmotsu manifold we get

$$\begin{aligned}R(X,Y,\varphi Z,\varphi W) &= R(X,Y,Z,W) +\\ &\quad + g(\varphi X, Z)g(\varphi Y, W) - g(\varphi X, W)g(\varphi Y, Z) +\\ &\quad + g(X,W)g(Y,Z) - g(X,Z)g(Y,W),\\ R(X,Y,\varphi Z, W) &= R(X,Y,Z,\varphi W) +\\ &\quad + g(\varphi X, W)g(Y,Z) - g(\varphi Y, W)g(X,Z) +\\ &\quad + g(\varphi Y, Z)g(X,W) - g(\varphi X, Z)g(Y,W),\\ R(X,Y,\varphi Z,\varphi W) &= R(\varphi X, \varphi Y, Z, W),\\ R(\varphi X, \varphi Y, \varphi Z, \varphi W) &= R(X,Y,Z,W) +\\ &\quad + \eta(X)\eta(W)g(Y,Z) - \eta(X)\eta(Z)g(Y,W) +\\ &\quad + \eta(Y)\eta(Z)g(X,W) - \eta(Y)\eta(W)g(X,Z).\end{aligned} \tag{1.3}$$

A Kenmotsu manifold with constant φ-holomorphic sectional curvature c is called a *Kenmotsu space form* with c. Then, [1], its curvature tensor R is expressed by

$$
\begin{aligned}
R(X,Y,Z,W) = \frac{c-3}{4}\Big\{g(Y,Z)g(X,W) - g(X,Z)g(Y,W)\Big\} + \\
+ \frac{c+1}{4}\Big[\{\eta(X)g(Y,W) - \eta(Y)g(X,W)\}\eta(Z) + \\
+ \{\eta(Y)g(X,Z) - \eta(X)g(Y,Z)\}\eta(W) + \\
+ F(Y,Z)F(X,W) - F(X,Z)F(Y,W) - \\
- 2F(X,Y)F(Z,W)\Big].
\end{aligned} \tag{1.4}
$$

A Kenmotsu manifold is said to be *flat* if its φ-sectional curvature is equal to zero on M.

An almost contact Riemannian manifold (M,φ,g,ξ) is called a *normal contact Riemannian* or *Sasakian* manifold if the structure vector field ξ and the fundamental 2-form F satisfy

$$\nabla_X \xi = \varphi X, \tag{1.5}$$

$$(\nabla_X F)(Y,Z) = \eta(Y)g(X,Z) - \eta(Z)g(X,Y) \tag{1.6}$$

for any $X,Y,Z \in TM$.

In a Sasakian manifold the Riemannian curvature tensor R with respect to g satisfies

$$
\begin{aligned}
& R(X,Y,Z,\xi) = \eta(X)g(Y,Z) - \eta(Y)g(X,Z), \\
& R(X,Y,\varphi Z,W) - R(X,Y,Z,\varphi W) = \\
& \qquad = g(\varphi X,Z)g(Y,W) - g(\varphi X,W)g(Y,Z) + \\
& \qquad + g(\varphi Y,W)g(X,Z) - g(\varphi Y,Z)g(X,W), \\
& R(X,Y,\varphi Z,\varphi W) = R(\varphi X,\varphi Y,Z,W) = R(X,Y,Z,W) + \\
& \qquad + g(X,Z)g(Y,W) - g(Y,Z)g(X,W) + \\
& \qquad + F(X,W)F(Y,Z) - F(Y,W)F(X,Z), \\
& R(\varphi X,\varphi Y,\varphi Z,\varphi W) = R(X,Y,Z,W) + \\
& \qquad + \eta(X)\eta(Z)g(Y,W) - \eta(X)\eta(W)g(Y,Z) + \\
& \qquad + \eta(Y)\eta(W)g(X,Z) - \eta(Y)\eta(Z)g(X,W), \\
& R_1(X,\xi) = 2n\eta(X)
\end{aligned} \tag{1.7}
$$

for any $X,Y,Z,W \in TM$.

A Sasakian manifold is said to be a *Sasakian space form* if it has constant φ-holomorpic sectional curvature. Then the curvature tensor field R

satisfies ([4])

$$\begin{aligned}R(X,Y,Z,W) = {} & \frac{c+3}{4}\Big\{g(X,W)g(Y,Z) - g(X,Z)g(Y,W)\Big\}+ \\ & + \frac{c-1}{4}\Big[\eta(X)\eta(Z)g(Y,W) - \eta(Y)\eta(Z)g(X,W)+ \\ & \quad + \eta(Y)\eta(W)g(X,Z) - \eta(Y)\eta(Z)g(X,W)+ \\ & \quad + F(Y,Z)F(X,W) - F(X,Z)F(Y,W)- \\ & \quad - 2F(X,Y)F(Z,W)\Big],\end{aligned} \tag{1.8}$$

where c is a constant holomorphic sectional curvature.

A Sasakian space form with zero holomorphic sectional curvature is called *flat.*

An almost contact Riemannian manifold M^{2n+1} is said to be η-*Einstein* if the Ricci tensor R_1 with respect to g satisfies

$$R_1(X,Y) = ag(X,Y) + b\eta(X)\eta(Y)$$

for certain differentiable functions a and b on M^{2n+1} which are called the *associated functions* of R_1. In particular, in an η-Einstein Kenmotsu and an η-Einstein Sasakian manifold, associated functions a and b respectively satisfy the following relations

$$a+b=-2n, \qquad \tau = 2n(a-1), \tag{1.9}$$

and

$$a+b=2n, \qquad \tau = 2n(a+1), \tag{1.10}$$

where τ is the scalar curvature with respect to g.

2. A new curvature-like tensor field in an almost contact Riemannian manifold

In this section, we define a new curvature-like tensor field in an almost contact Riemannian manifold.

In a differentiable manifold M a $(0,4)$-type tensor field $T(X,Y,Z,W)$ is called *curvature-like* if it satisfies

$$T(X,Y,Z,W) = -T(Y,X,Z,W) = -T(X,Y,W,Z) = T(Z,W,X,Y),$$
$$T(X,Y,Z,W) + T(X,Z,W,Y) + T(X,W,Y,Z) = 0,$$

for any $X,Y,Z,W \in TM$. Of course, a Riemannian curvature tensor, a conformal curvature tensor in a Riemannian manifold, a Bochner curvature tensor in a Kählerian manifold and a C-Bochner curvature tensor in a Sasakian manifold are examples of curvature-like tensor fields.

In an almost contact Riemannian manifold (M,φ,ξ,g), we define a $(0,4)$-type tensor field $(CHR)(X,Y,Z,W)$ as

$$\begin{aligned}
(CHR)(X,Y,Z,W) = \frac{1}{16}\Big\{&3\big[R(X,Y,Z,W)+R(\varphi X,\varphi Y,Z,W)+\\
&+R(X,Y,\varphi Z,\varphi W)+R(\varphi X,\varphi Y,\varphi Z,\varphi W)\big]-\\
&-R(X,Z,\varphi W,\varphi Y)-R(\varphi X,\varphi Z,W,Y)-\\
&-R(X,W,\varphi Y,\varphi Z)-R(\varphi X,\varphi W,Y,Z)+\\
&+R(\varphi X,Z,\varphi W,Y)+R(X,\varphi Z,W,\varphi Y)+\\
&+R(\varphi X,W,Y,\varphi Z)+R(X,\varphi W,\varphi Y,Z)+\\
&+\eta(X)\big[2\{R(Z,W,Y,\xi)+R(\varphi Z,\varphi W,Y,\xi)\}+R(\varphi Z,\varphi Y,W,\xi)+\\
&\quad+R(\varphi Y,\varphi W,Z,\xi)-R(\varphi Y,W,\varphi Z,\xi)-R(Z,\varphi Y,\varphi W,\xi)\big]-\\
&-\eta(Y)\big[2\{R(Z,W,X,\xi)+R(\varphi Z,\varphi W,X,\xi)\}+R(\varphi Z,\varphi X,W,\xi)+\\
&\quad+R(\varphi X,\varphi W,Z,\xi)-R(Z,\varphi X,\varphi W,\xi)-R(\varphi X,W,\varphi Z,\xi)\big]+\\
&+\eta(Z)\big[2\{R(X,Y,W,\xi)+R(\varphi X,\varphi Y,W,\xi)\}+R(\varphi X,\varphi W,Y,\xi)+\\
&\quad+R(\varphi W,\varphi Y,X,\xi)-R(\varphi W,Y,\varphi X,\xi)-R(X,\varphi W,\varphi Y,\xi)\big]-\\
&-\eta(W)\big[2\{R(X,Y,Z,\xi)+R(\varphi X,\varphi Y,Z,\xi)\}+R(\varphi X,\varphi Z,Y,\xi)+\\
&\quad+R(\varphi Z,\varphi Y,X,\xi)-R(X,\varphi Z,\varphi Y,\xi)-R(\varphi Z,Y,\varphi X,\xi)\big]\Big\}
\end{aligned}$$

for any $X,Y,Z,W\in TM$. Then, by the straightforward calculation, we can check the above tensor field is curvature-like. We call this tensor field a *contact holomorphic Riemannian curvature tensor* in an almost contact Riemannian manifold.

A contact Riemannian manifold is said to be (CHR)-*flat* if the (CHR)-curvature tensor vanishes, identically.

In an almost contact Riemannian manifold the (CHR)-curvature tensor satisfies

$$\begin{aligned}
16(CHR)(\varphi X,\varphi Y,Z,W) = {}&16(CHR)(X,Y,Z,W)+\\
&+\eta(X)\Big\{R(Z,W,Y,\xi)+R(\varphi Z,\varphi W,Y,\xi)\Big\}-\\
&-\eta(Y)\Big\{R(Z,W,X,\xi)+R(\varphi Z,\varphi W,X,\xi)\Big\}+\\
&+T(X,Y,Z,W),\\
16(CHR)(X,Y,\varphi Z,\varphi W) = {}&16(CHR)(X,Y,Z,W)+\\
&+\eta(Z)\Big\{R(X,Y,W,\xi)+R(\varphi X,\varphi Y,W,\xi)\Big\}-\\
&-\eta(W)\Big\{R(X,Y,Z,\xi)+R(\varphi X,\varphi Y,Z,\xi)\Big\}+\\
&+T(X,Y,Z,W),
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
16(CHR)(\varphi X, \varphi Y, \varphi Z, \varphi W) = 16(CHR)(X, Y, Z, W)+ \\
& + \eta(X)\Big\{R(Z, W, Y, \xi) + R(\varphi Z, \varphi W, Y, \xi)\Big\}- \\
& - \eta(Y)\Big\{R(Z, W, X, \xi) + R(\varphi Z, \varphi W, X, \xi)\Big\}+ \\
& + \eta(Z)\Big\{R(X, Y, W, \xi) + R(\varphi X, \varphi Y, W, \xi)\Big\}- \\
& - \eta(W)\Big\{R(X, Y, Z, \xi) + R(\varphi X, \varphi Y, Z, \xi)\Big\}- \\
& - \eta(Z)\Big\{\eta(X)R(\xi, Y, W, \xi) + \eta(Y)R(X, \xi, W, \xi)\Big\}+ \\
& + \eta(W)\Big\{\eta(X)R(\xi, Y, Z, \xi) + \eta(Y)R(X, \xi, Z, \xi)\Big\}+ \\
& + T(X, Y, Z, W), \\
(CHR)(X, Y, Z, \xi) = \frac{1}{16}\Big[R(X, Y, Z, \xi) + R(\varphi X, \varphi Y, Z, \xi)+ \\
& + \eta(X)\{2R(Y, \xi, Z, \xi) - R(\varphi Y, \xi, \varphi Z, \xi)\}- \\
& - \eta(Y)\{2R(X, \xi, Z, \xi) - R(\varphi X, \xi, \varphi Z, \xi)\}\Big],
\end{aligned}
$$

where we put

$$
\begin{aligned}
T(X, Y, Z, W) = \eta(Z)\Big\{&-2\eta(X)R(\xi, Y, W, \xi) - 2\eta(Y)R(X, \xi, W, \xi)+ \\
&+ \eta(X)R(\xi\varphi W, \varphi Y, \xi) + \eta(Y)R(\varphi W, \xi, \varphi X, \xi)\Big\}- \\
- \eta(W)\Big\{&-2\eta(X)R(\xi, Y, Z, \xi) - 2\eta(Y)R(X, \xi, Z, \xi)+ \\
&+ \eta(X)R(\xi, \varphi Z, \varphi Y, \xi) + \eta(Y)R(\varphi Z, \xi, \varphi X, \xi)\Big\}.
\end{aligned}
$$

Moreover, we have

$$
\begin{aligned}
&(CHR)(X, \varphi X, \varphi X, X) = \\
&\quad = \frac{1}{16}\Big[16R(X, \varphi X, \varphi X, X) + 8\eta(X)R(X, \varphi X, \varphi X, \xi)+ \\
&\qquad + \eta(X)^2\{11R(\xi, \varphi X, \varphi X, \xi) + 4R(\xi, X, X, \xi)\}\Big].
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

For a unit vector field X the following tensor $(CHR)(X, \varphi X, \varphi X, X)$ is called a *ϕ-holomorphic (CHR)-curvature* of X, and an almost contact Riemannian manifold is called a *(CHR)-space form* if the holomorphic (CHR)-curvature constant on M.

3. (CHR)-curvature tensor in a Kenmotsu manifold

In this section we consider a (CHR)-curvature tensor in a Kenmotsu manifold. By virtue of (1.2) and (1.3) we have

$$\begin{aligned}
&(CHR)(X,Y,Z,W) = R(X,Y,Z,W)+\\
&\quad+\frac{1}{4}\Big\{g(\varphi X,Z)g(\varphi Y,W)-g(\varphi X,W)g(\varphi Y,Z)+2g(\varphi X,Y)g(\varphi Z,W)+\\
&\qquad+\eta(X)\eta(W)g(Y,Z)-\eta(X)\eta(Z)g(Y,W)+\\
&\qquad+\eta(Y)\eta(Z)g(X,W)-\eta(Y)\eta(W)g(X,Z)\Big\}+\\
&\quad+\frac{3}{4}\Big\{g(X,W)g(Y,Z)-g(X,Z)g(Y,W)\Big\}.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Let the manifold be (CHR)-flat. Then we have from (3.1) that the curvature tensor R is written by

$$\begin{aligned}
&R(X,Y,Z,W) = \frac{3}{4}\Big\{g(X,Z)g(Y,W)-g(X,W)g(Y,Z)\Big\}+\\
&\quad+\frac{1}{4}\Big\{g(\varphi X,W)g(\varphi Y,Z)-g(\varphi X,Z)g(\varphi Y,W)-2g(\varphi X,Y)g(\varphi Z,W)+\\
&\qquad+\eta(X)\eta(Z)g(Y,W)-\eta(X)\eta(W)g(Y,Z)+\\
&\qquad+\eta(Y)\eta(W)g(X,Z)-\eta(Y)\eta(Z)g(X,W)\Big\}.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Comparing (3.2) and (1.4) we obtain

Theorem 3.1. *A (CHR)-flat Kenmotum manifold is flat.*

4. (CHR)-curvature tensor in a Sasakian manifold

In this section, we consider a (CHR)-flat Sasakian manifold and prove that this manifold is a Sasakian space form with zero holomorphic sectional curvature.

By virtue of (1.5), (1.6), (1.7) and Bianchi identity, [6], the (CHR)-curvature tensor (CHR) in a Sasakian manifold satisfies

$$\begin{aligned}
&(CHR)(X,Y,Z,W) = R(X,Y,Z,W)+\\
&\quad+\frac{3}{4}\Big\{g(X,Z)g(Y,W)-g(X,W)g(Y,Z)\Big\}+\\
&\quad+\frac{1}{4}\Big\{g(\varphi X,W)g(\varphi Y,Z)-g(\varphi X,Z)g(\varphi Y,W)-2g(\varphi X,Y)g(\varphi Z,W)+\\
&\qquad+\eta(X)\eta(Z)g(Y,W)-\eta(X)\eta(W)g(Y,Z)+\\
&\qquad+\eta(Y)\eta(W)g(X,Z)-\eta(Y)\eta(Z)g(X,W)\Big\}.
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Consider the (CHR)-flat case in a Sasakian manifold. Then we have from (3.1) that the curvature tensor R is written as

$$
\begin{aligned}
R(X,Y,Z,W) = \frac{3}{4}\Big\{g(X,W)g(Y,Z) - g(X,Z)g(Y,W)\Big\} - \\
- \frac{1}{4}\Big\{g(\varphi X,W)g(\varphi Y,Z) - g(\varphi X,Z)g(\varphi Y,W) - 2g(\varphi X,Y)g(\varphi Z,W) + \\
+ \eta(X)\eta(Z)g(Y,W) - \eta(X)\eta(W)g(Y,Z) + \\
+ \eta(Y)\eta(W)g(X,Z) - \eta(Y)\eta(Z)g(X,W)\Big\}.
\end{aligned}
$$

Comparing the above equation and (1.3) we get

Theorem 4.1. *A (CHR)-flat Sasakian manifold is flat.*

5. The properties of the (CHR)-curvature tensor

In this section we consider other properties of the (CHR)-curvature tensor in Kenmotsu and Sasakian manifolds.

Since the (CHR)-curvature tensor in a Kenmotsu manifold satisfies (3.1), using (1.3) and (2.1), we obtain

Proposition 5.1. *In a Kenmotsu manifold we have*

$$
\begin{aligned}
&(CHR)(X,Y,Z,\xi) = 0, \\
&(CHR)(X,Y,\varphi Z,\varphi W) = (CHR)(\varphi X,\varphi Y,Z,W) = \\
&\qquad = (CHR)(\varphi X,\varphi Y,\varphi Z,\varphi W) = (CHR)(X,Y,Z,W), \qquad (5.1) \\
&(CHR)(X,\varphi X,\varphi X,X) = R(X,\varphi X,\varphi X,X) + \\
&\qquad + \eta(X)^2\{g(X,X) - \eta(X)^2\}
\end{aligned}
$$

Similarly, we have from (1.7) and (4.1)

Proposition 5.2. *In a Sasakian manifold, we have*

$$
\begin{aligned}
&(CHR)(X,Y,Z,\xi) = 0, \\
&(CHR)(X,Y,\varphi Z,\varphi W) = (CHR)(\varphi X,\varphi Y,Z,W) = \\
&\qquad = (CHR)(\varphi X,\varphi Y,\varphi Z,\varphi W) = (CHR)(X,Y,Z,W) \qquad (5.2) \\
&(CHR)(X,\varphi X,\varphi X,X) = R(X,\varphi X,\varphi X,X) - \\
&\qquad - \eta(X)^2\{g(X,X) - \eta(X)^2\}.
\end{aligned}
$$

Next, we put

$$
\rho(CHR)(X,Y) = \sum_{i=1}^{2n+1} (CHR)(e_i,X,Y,e_i)
$$

for a local orthonormal frame $(e_1, e_2, \dots, e_{2n+1})$ of an almost contact Riemannian manifold M^{2n+1}. We say this $\rho(CHR)(X,Y)$ a (CHR)-*Ricci tensor.* By virtue of (3.1) and (4.1), the (CHR)-Ricci tensor in a Kenmotsu and a Sasakian manifold are respectively written by

$$\begin{aligned}\rho(CHR)(X,Y) = R_1(X,Y)+ \\ +\frac{1}{2}\Big\{(3n-1)g(X,Y)+(n+1)\eta(X)\eta(Y)\Big\},\end{aligned} \tag{5.3}$$

and

$$\begin{aligned}\rho(CHR)(X,Y) = R_1(X,Y)- \\ -\frac{1}{2}\Big\{(3n-1)g(X,Y)+(n+1)\eta(X)\eta(Y)\Big\}.\end{aligned} \tag{5.4}$$

We also put

$$\tau(CHR) = \sum_{i=1}^{2n+1}(CHR)(e_i, e_i)$$

which is called the (CHR)-*scalar curvature* of (CHR)-curvature tensor. Then, in a Kenmotsu and a Sasakian manifold, we respectively have from (5.3) and (5.4)

$$\tau(CHR) = \tau + n(3n+1),$$
$$\tau(CHR) = \tau - n(3n+1).$$

Now, a contact Riemannian manifold M^{2n+1} is called (CHR)-η-*Einstein* if its (CHR)-Ricci tensor $\rho(CHR)(X,Y)$ has the form

$$\rho(CHR)(X,Y) = \alpha g(X,Y) + \beta\eta(X)\eta(Y) \tag{5.5}$$

for certain functions α and β which are called *associated functions* of $\rho(CHR)$. In particular, if our manifold is Kenmotsu or Sasakian, then we have from (5.3) and (5.4) the Ricci tensors are respectively written as

$$R_1(X,Y) = \big(\alpha - \tfrac{3n-1}{2}\big)g(X,Y) + \big(\beta - \tfrac{n+1}{2}\big)\eta(X)\eta(Y), \tag{5.6}$$

$$R_1(X,Y) = \big(\alpha + \tfrac{3n-1}{2}\big)g(X,Y) + \big(\beta + \tfrac{n+1}{2}\big)\eta(X)\eta(Y). \tag{5.7}$$

Conversely, if our manifold M^{2n+1} is η-Einstein, then we can easily that a Kenmotsu and a Sasakian manifolds are (CHR)-η-Einstein. Moreover, we have from (1.9), (5.5) and (5.6)

$$\alpha + \beta = 4n \qquad : Kenmotsu, \tag{5.8}$$

$$\alpha + \beta = 0 \qquad : Sasakian. \tag{5.9}$$

By virtue of (5.3), (5.4), (5.8), and (5.9) the scalar curvature τ and the (CHR)-scalar curvature $\tau(CHR)$ are respectively written as

$$\tau = 2n\alpha - 3n(n-1), \quad \tau(CHR) = 2n(\alpha+2) \qquad : Kenmotsu, \tag{5.10}$$

$$\tau = 2n(\alpha + 3n + 1), \quad \tau(CHR) = n(2\alpha + 3n + 1) \quad : \textit{Sasakian}. \tag{5.11}$$

Thus we have

Theorem 5.3. *A Kenmotsu or a Sasakian manifold M^{2n+1} is (CHR)-η-Einstein if and only if M^{2n+1} is η-Einstein and the scalar curvatures τ and $\tau(CHR)$ are respectively written by* (5.10) *and* (5.11) *which includes only the associated function α.*

Corollary 5.4. *In an (CHR)-η-Einstein Kenmotsu or Sasakian manifold M^{2n+1}, the scalar curvatures τ and $\tau(CHR)$ are constant if and only if one of the associated functions is constant.*

6. (CHR)-space form

In this section we define a (CHR)-space form in an almost contact Riemannian manifold.

Let M^{2n+1} be an $(2n+1)$-dimensional almost contact Riemannian manifold.

Definition 6.1. An almost contact Riemannian manifold M^{2n+1} is said to be a (CHR)-*space form* if its contact holomorphic (CHR)-sectional curvature is constant for any vector fields and any point on M^{2n+1}

$$(CHR)(X, \varphi X, \varphi X, X) = c\|X\|^2\{\|X\|^2 - \eta(X)^2\} \tag{6.1}$$

for a certain constant c and any $X \in TM$, where $\|X\|$ is the length of X with respect to g.

$$(CHR)(X, \varphi X, \varphi X, X) = c\|X\|^4$$

for any $X \in TM - \{\xi\}$.

First, we consider a Kenmotsu (CHR)-space form, that is a manifold M whose (CHR)-curvature tensor satisfies (6.1).

By virtue of (5.1)

$$c\|X\|^4 = R(X, \varphi X, \varphi X, X) + \eta(X)^2\{g(X, X) - \eta(X)^2\}$$

for any $X \in TM$. Moreover, from the above equation we know

$$c\|X\|^4 = R(X, \varphi X, \varphi X, X)$$

for any $X \in TM - \{\xi\}$. This means that the manifold is a Kenmotsu space form. So, using (3.1) and Proposition 5.1, the curvature tensor R is written as

$$
\begin{aligned}
(CHR)(X,Y,Z,W) = \frac{1}{4}\Big\{ & g(X,Z)g(Y,W) - g(X,W)g(Y,Z) + \\
& + g(\varphi X,Z)g(\varphi Y,W) - g(\varphi X,W)g(\varphi Y,Z) + 2g(\varphi X,Y)g(\varphi Z,\varphi W) + \\
& + \eta(X)\eta(W)g(Y,Z) - \eta(X)\eta(Z)g(Y,W) + \eta(Y)\eta(Z)g(X,W) - \\
& - \eta(Y)\eta(W)g(X,Z)\Big\}.
\end{aligned}
\tag{6.2}
$$

From the above equation, we obtain

$$
\rho(CHR)(X,Y) = -\frac{n+1}{2}\Big\{g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y)\Big\}. \tag{6.3}
$$

and

$$
\tau(CHR) = -n(n+1). \tag{6.4}
$$

Summing up, we have

Theorem 6.2. *If an $(2n+1)$-dimensional (CHR)-Kenmotsu space form, then the (CHR)-curvature tensor, the (CHR)-Ricci tensor and the (CHR)-scalar curvature are respectively given by* (6.2), (6.3), *and* (6.4).

7. Sasakian (CHR)-space forms

In this section, we consider a Sasakian (CHR)-space form and we determine the Riemannian curvature tensor of this manifold.

Let M be a Sasakian manifold. Then the (CHR)-curvature tensor satisfies (4.1). From this we have

$$
\begin{aligned}
(CHR)(X,\varphi X,\varphi X,X) = R(X,\varphi X,\varphi X,X) - \\
- \eta(X)^2 g(X,X) + \eta(X)^4.
\end{aligned}
\tag{7.1}
$$

Now suppose that M is a Sasakian (CHR)-space form. Then, we have from (6.1) and (7.1) that

$$
R(X,\varphi X,\varphi X,X) = c\|X\|^4 + \eta(X)^2 g(X,X) - \eta(X)^4
$$

for any $X \in TM$. In particular, for $X \in TM - \{\xi\}$ the above equation means

$$
R(X,\varphi X,\varphi X,X) = c\|X\|^4,
$$

that is, the manifold is a Sasakian space form with the constant φ-holomorphic sectional curvature c. So, its curvature tensor $R(X,Y,Z,W)$ satisfies (1.8). Substituting (1.8) into (4.1), we get

$$\begin{aligned}(CHR)(X,Y,Z,W) = \frac{c}{4}\Big\{&g(X,W)g(Y,Z) - g(X,Z)g(Y,W)+\\ &+\eta(X)\eta(Z)g(Y,W) - \eta(Y)\eta(Z)g(X,W) + \eta(Y)\eta(W)g(X,Z)-\\ &-\eta(X)\eta(W)g(Y,Z) - g(\varphi X,W)g(\varphi Y,Z)+\\ &+g(\varphi X,Z)g(\varphi Y,W) - 2g(\varphi X,Y)g(\varphi Z,W)\Big\}.\end{aligned} \tag{7.2}$$

From (7.2), we obtain

$$\rho(CHR)(X,Y) = \frac{(n+1)c}{2}\Big\{g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y)\Big\} \tag{7.3}$$

and

$$\tau(CHR) = n(n+1)c. \tag{7.4}$$

As a result, we have

Theorem 7.1. *If M is an $(2n+1)$-dimensional Sasakian (CHR)-space form, then its (CHR)-curvature tensor, the Ricci (CHR)-tensor and the scalar (CHR)-curvature are respectively given by* (7.2), (7.3), *and* (7.4).

Rerefences

[1] K. Arslan, R. Ezentas, I. Mihai, C. Murathan, C. Ozgur. Ricci curvature of submanifolds in Kenmotsu space forms. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 29(12):719–726, 2002.

[2] Avik De. On Kenmotsu manifold. *Bulletin of Mathematical Analysis and Applications*, 2(3):1–6, 2010.

[3] Katsuei Kenmotsu. A class of almost contact Riemannian manifolds. *Tohoku Mathematical Journal*, 24(1):93–103, 1972.

[4] Koji Matsumoto, Ion Mihai. Ricci tensor of c-totally real submanifolds in Sasakian space forms. *Nihonkai Mathematical Journal*, 13(2):191–198, 2002.

[5] Mileva Prvanovic. Conformally invariant tensors of an almost Hermitian manifold associated with the holomorphic curvature tensor. *Journal of Geometry*, 103(89):89–101, 2012.

[6] Kentaro Yano, Masahiro Kon. *Structures on Manifolds*, volume 3 of *Series in pure mathematics*. World Scientific, 1984.

Received: November 30, 2016, accepted: January, 9, 2017.

Koji Matsumoto
2-3-65 Nishi-Odori, Yonezawa, Yamagata, 992-0059, Japan
Email: tokiko_matsumoto@yahoo.com

Proceedings of the
International Geometry Center
Vol. 9, no. 3-4 (2016) pp. 17–36

Застосування просторів-склеювачів до класифікації Бера відображень однієї змінної

Олена Карлова

Abstract. We introduce a notion of a (locally) weak adhesive space and consider some applications of weak adhesives to Baire classification of Lebesgue and fragmented maps.

Анотація. Ми вводимо поняття (локально) слабкого простору-склеювача і розглядаємо застосування склеювачів до берівської класифікації відображень з класів Лебеґа, а також фрагментовних відображень.

1. Основні позначення та історичні зауваження

Через $\mathrm{C}(X,Y)$ ми позначаємо множину всіх неперервних відображень між топологічними просторами X та Y. Підмножина A простору X називається *функціонально відкритою (функціонально замкненою)*, якщо існує така функція $f\in \mathrm{C}(X,[0,1])$, що $A=f^{-1}\big((0,1]\big)$ (чи, відповідно, $A=f^{-1}(0)$).

Нехай $\mathscr{F}$ — сім'я всіх функціонально замкнених підмножин простору X. Визначимо індуктивно *функціональні борелівські класи* $\mathcal{M}_\alpha(X)$ та $\mathcal{A}_\alpha(X)$. Позначимо

$$\mathcal{M}_0(X)=\mathscr{F},\quad \mathcal{A}_0(X)=\{X\setminus A : A\in\mathscr{F}\}$$

і для всіх ординалів $\alpha\in[1,\omega_1)$ покладемо

$$\mathcal{M}_\alpha(X)=\Big\{\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n : A_n\in\bigcup_{\beta<\alpha}\mathcal{A}_\beta(X),\ n=1,2,\dots\Big\},$$

2010 Mathematics Subject Classification: 54C08, 26A21
Ключові слова: weak adhesive space, Lebesgue-Hausdorff Theorem, Baire classification, fragmented map

$$\mathcal{A}_\alpha(X) = \Big\{ \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n : A_n \in \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{M}_\beta(X),\ n = 1, 2, \dots \Big\}.$$

Елементи сімей $\mathcal{M}_\alpha(X)$ і $\mathcal{A}_\alpha(X)$ ми називаємо *множинами функціонально мультиплікативного класу* α чи *функціонально адитивного класу* α, відповідно; елементи сім'ї $\mathcal{M}_\alpha(X) \cap \mathcal{A}_\alpha(X)$ називаються *функціонально двосторонніми множинами класу* α, а при $\alpha = 1$ (функціонально) двосторонні множини першого класу називаються просто *(функціонально) двосторонніми.*

Зрозуміло, що в досконало нормальному просторі X клас $\mathcal{M}_\alpha(X)$ та клас $\mathcal{A}_\alpha(X)$ — це звичайний мультиплікативний клас α чи адитивний клас α підмножин простору X, відповідно.

Кажуть, що відображення $f : X \to Y$ належить до *(функціонального) класу* α *Лебеґа* і пишуть $f \in \mathrm{H}_\alpha(X, Y)$ (відповідно, $f \in \mathrm{K}_\alpha(X, Y)$), якщо прообраз $f^{-1}(V)$ довільної відкритої множини V в Y є множиною (функціонально) адитивного класу α в X.

Для множини $A \subseteq Y^X$ символом $\overline{A}^{\mathrm{p}}$ ми позначаємо множину усіх поточкових границь послідовностей відображень з A.

Нагадаємо також означення берівських класів функцій. *Нульовим класом Бера* $\mathrm{B}_0(X, Y)$ є сім'я всіх неперервних функцій $C(X, Y)$, а класи $\mathrm{B}_\alpha(X, Y)$ при $\alpha \in [1, \omega_1)$ визначаються індуктивно формулою

$$\mathrm{B}_\alpha(X, Y) = \overline{\bigcup_{\beta<\alpha} \mathrm{B}_\beta(X, Y)}^{\mathrm{p}},$$

а елементи класу $\mathrm{B}_\alpha(X, Y)$ називаються *відображеннями* α*-го класу Бера.*

Послідовність $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ відображень $f_n : X \to Y$ між топологічними просторами X та Y називається *стабільно збіжною до відображення* $f : X \to Y$ *на просторі* X (цей факт ми позначаємо $f_n \xrightarrow{\mathrm{st}} f$), якщо для кожного $x \in X$ існує номер $k \in \mathbb{N}$, такий, що $f_n(x) = f(x)$ для всіх $n \geq k$.

Відображення $f : X \to Y$ належить до *першого стабільного класу Бера*, якщо існує послідовність неперервних відображень між X та Y, яка стабільно збігається до f на X. Для кожного ординалу $\alpha \in (0, \omega_1)$ через $\mathrm{B}_\alpha^{\mathrm{st}}(X, Y)$ ми позначаємо сім'ю всіх відображень α*-го стабільного класу Бера*, тобто,

$$\mathrm{B}_\alpha^{\mathrm{st}}(X, Y) = \overline{\bigcup_{\beta<\alpha} \mathrm{B}_\beta^{\mathrm{st}}(X, Y)}^{\mathrm{st}},$$

де через $\overline{A}^{\mathrm{st}}$ позначено множину всіх стабільних границь послідовностей відображень з $A \subseteq Y^X$.

Зв'язок між класами відображень Бера і Лебеґа — це класична задача, яка глибоко вивчена для відображень, що діють між нормальним і метризовним просторами чи близькими до них. Ця задача бере свій початок з праць Р. Бера [1], А. Лебеґа [15], Ф. Гаусдорфа [8] і С. Банаха [2]. Теорема Лебеґа-Гаусдорфа-Банаха стверджує, що класи Бера і класи Лебеґа збігаються для певних просторів X та Y.

Теорема 1.1. *Нехай X — метризовний простір і $Y = [0,1]^{\mathfrak{m}}$, $\mathfrak{m} \le \aleph_0$. Тоді*

$$\mathrm{B}_\alpha(X,Y) = \begin{cases} \mathrm{H}_\alpha(X,Y), & \textit{при } \alpha < \omega_0, \\ \mathrm{H}_{\alpha+1}(X,Y), & \textit{при } \alpha \ge \omega_0. \end{cases}$$

Ця теорема узагальнювалася впродовж XX-XXI століть багатьма математиками (див. статті [17], [18], [7], [5], [19], [10], [9], [11] і вказану там літературу).

Автором цієї статті були доведені найзагальніші аналоги теореми Лебеґа-Гаусдорфа-Банаха, для отримання яких було введено поняття сильно σ-функціонально дискретного відображення.

Сім'я $\mathscr{A} = (A_i : i \in I)$ підмножин простору X називається *сильно функціонально дискретною* або, скорочено, *sfd сім'єю*, якщо існує така дискретна сім'я $(U_i : i \in I)$ функціонально відкритих підмножин X, що $\overline{A_i} \subseteq U_i$ для кожного $i \in I$.

Сім'я $\mathscr{B}$ множин простору X називається *базою для відображення* $f : X \to Y$, [6], якщо прообраз $f^{-1}(V)$ довільної відкритої множини V з Y зображається у вигляді об'єднання множин з сім'ї $\mathscr{B}$. Якщо відображення $f : X \to Y$ має базу, яка є об'єднанням послідовності sfd-сімей підмножин X, то ми кажемо, що f є *σ-sfd відображенням.* Клас усіх таких відображень між X та Y позначатимемо символом $\Sigma^s(X,Y)$. Через $\Sigma^s_\alpha(X,Y)$ позначимо сукупність всіх відображень між X та Y, які мають σ-sfd базу, що складається з функціонально двосторонніх множин класу α. Для скорочення запису покладемо

$$\Sigma^s_{<\alpha}(X,Y) = \bigcup_{\beta<\alpha} \Sigma^s_\beta(X,Y).$$

В [10] і [11] був доведений результат, який, зокрема, узагальнює теореми Фосґерау [5] і Веселого [19] на випадок довільного топологічного простору X.

Теорема 1.2. *Нехай X — топологічний простір і Y — метризовний простір. Якщо виконується одна з наступних умов:*

a) *Y — зв'язний і локально лінійно зв'язний, або*
b) $\dim X = 0$,

то $\mathrm{K}_1(X,Y) \cap \Sigma^s(X,Y) = \mathrm{B}_1(X,Y)$.

З узагальнення теореми Банаха [9, теорема 22] і теореми 1.2 випливає наступний факт.

Теорема 1.3. *Нехай* $\alpha \in [0, \omega_1)$, X *— топологічний простір,* Y *— метризовний зв'язний і локально лінійно зв'язний простір. Тоді*

$$\mathrm{B}_\alpha(X,Y) = \begin{cases} \Sigma^s_\alpha(X,Y), & \text{при } \alpha < \omega_0, \\ \Sigma^s_{\alpha+1}(X,Y), & \text{при } \alpha \geq \omega_0. \end{cases}$$

В цій статті ми спочатку узагальнюємо теорему 1.3 на випадок просторів Y, які не обов'язково задовольняють умови типу лінійної зв'язності. А саме, ми вводимо в пункті 2 поняття (локально) слабкого склеювача, яке охоплює поняття простору-склеювача, розглянутого в [12].

Далі, в пункті 3, розвиваючи методи з [5] і [10], ми доводимо теорему Лебеґа-Гаусдорфа для функцій між топологічним простором X та метризовним слабким і локально слабким склеювачем Y.

У четвертому пункті ми розглядаємо поняття Δ- та π-замкненої систем функцій і встановлюємо загальне технічне твердження про замкненість відносно рівномірних границь систем функцій, які є поточковими замиканнями Δ- та π-замкнених систем. З цього результату ми виводимо корисні твердження про замкненість відносно рівномірних границь системи усіх функцій першого класу Бера. Теорема 4.6 з пункту 4 є найзагальнішою на сьогодні версією теореми Лебеґа-Гаусдорфа-Банаха про рівність берівських та борелівських класів функцій.

Нарешті, в пункті 5 ми застосовуємо поняття слабкого склеювача до берівської класифікації фрагментовних відображень.

2. Поняття і приклади слабких склеювачів

Означення 2.1. Нехай X та Y — топологічні простори. Простір Y називається

- *склеювачем для простору* X, якщо для довільних двох неперетинних функціонально замкнених множин A та B в X і довільних неперервних відображень $f, g : X \to Y$ існує неперервне відображення $h : X \to Y$, таке, що $h|_A = f|_A$ і $h|_B = g|_B$;
- *слабким склеювачем для* X, якщо для довільних точок $y, z \in Y$ і довільних неперетинних функціонально замкнених множин A та B в X існує неперервне відображення $h : X \to Y$, таке, що $h|_A = y$ і $h|_B = z$;
- *локально слабким склеювачем для* X, якщо для довільних неперетинних функціонально замкнених множин A та B в X, довільної

точки $y \in Y$ і довільного околу $V \subseteq Y$ цієї точки існує окіл U точки y, такий, що $U \subseteq V$ і для кожного $z \in U$ існує неперервне відображення $h : X \to V$ з властивістю $h|_A = y$ і $h|_B = z$.

З означення склеювача негайно випливає, що кожний екстензор є склеювачем. Зрозуміло, що у випадку, коли будь-які два неперервні відображення між X та Y гомотопні, то Y є склеювачем для простору X. Приклад 2.9 (a) з [12] показує, що клас склеювачів строго ширший, ніж клас екстензорів. У прикладі 2.9 (b) з [12] наводиться склеювач Y для X і два неперервні відображення $f, g : X \to Y$, які не гомотопні.

Слід зазначити, що в [12, теорема 2.7] встановлено, що довільний топологічний простір Y є склеювачем для кожного сильно нульвимірного простору; лінійно зв'язний Y є склеювачем для довільного компакта X, кожна точка якого має базу околів з дискретною межею; Y є склеювачем для довільного топологічного простору X в тому і тільки тому випадку, коли Y — стягуваний.

Легко бачити, що (локально) лінійно зв'язний простір є (локально) слабким склеювачем для довільного топологічного простору X. Втім, з наступного зауваження випливає, що клас слабких склеювачів строго ширший, ніж клас лінійно зв'язних просторів.

Зауваження 2.2. Нехай Z — довільний регулярний простір, на якому кожна неперервна дійснозначна функція стала (див., наприклад, [4, 2.7.18]). Позначимо $X_1 = X_2 = Z$ і розглянемо пряму суму $X = X_1 \oplus X_2$. Тоді X — регулярний простір, в якому єдині нетривіальні функціонально замкнені множини — це X_1 та X_2, кожна з яких є відкрито-замкненою в X. Легко бачити, що довільний T_1-простір Y є слабким склеювачем для X.

Зауваження 2.3. Зрозуміло, що довільний континуум Пеано є слабким і локально слабким склеювачем для будь-якого топологічного простору. Але, незважаючи на лінійну і локальну лінійну зв'язність континуума Пеано, він може не бути склеювачем навіть для квадрату $X = [0, 1]^2$.

Справді, розглянемо килим Серпінського $Y \subseteq X$. Зафіксуємо $x^* \in Y$ і розглянемо відображення $f : X \to Y$, таке, що $f(x) = x$ при $x \in Y$ і $f(x) = x^*$ при $x \in X \setminus Y$. Покладемо $f_1(x) = x$ і $f_2(x) = x^*$ для всіх $x \in X$. Зауважимо, що множини $X_1 = Y$ і $X_2 = X \setminus Y$ є типу F_σ і G_δ в X, $X_1 \cup X_2 = X$ і $f|_{X_i} = f_i|_{X_i}$ при $i \in \{1, 2\}$, тобто, виконується умова (3) теореми 3.2 з [12]. Припустимо, що Y — склеювач для X. Тоді за теоремою 3.2 (1) з [12] функція f належить до першого стабільного класу Бера. Звідси випливає, що існує послідовність $(g_n)_{n=1}^\infty$ неперервних функцій $g_n : X \to Y$ і замкнене покриття $(\widetilde{X}_n : n \in \mathbb{N})$ простору X, таке, що $g_n|_{\widetilde{X}_n} = f|_{\widetilde{X}_n}$ і $\widetilde{X}_n \subseteq \widetilde{X}_{n+1}$ для кожного n. За теоремою Бера про категорію, виберемо таке $k \in \mathbb{N}$, що множина $\widetilde{X}_k \cap Y$ має непорожню внутрішність в Y. Тоді існує відкритий квадрат L в Y, такий, що його межа ∂L міститься в перетині $\widetilde{X}_k \cap Y$. Оскільки $g_k|_{\partial L}(x) = x$ для всіх $x \in \partial L$ і $g_k(\mathrm{int}L) \subseteq X \setminus \mathrm{int}L$, то ∂L є ретрактом $\overline{L}$, що неможливо. Отже, Y не є склеювачем для X.

Твердження 2.4. *Зв'язний локально слабкий склеювач Y для X є слабким склеювачем для X.*

Доведення. Візьмемо неперетинні функціонально замкнені множини $A, B \subseteq X$ і нехай $f, g : X \to [0,1]$ — такі дві неперервні функції, що $A = f^{-1}(0)$ і $B = g^{-1}(0)$. Визначимо неперервну функцію $\varphi : X \to [0,1]$,

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{f(x)+g(x)}, \qquad x \in X.$$

Очевидно, що $A = \varphi^{-1}(0)$, $B = \varphi^{-1}(1)$. Нехай $C = \varphi^{-1}(\frac{1}{2})$.

Зафіксуємо точку $a \in Y$. Розглянемо максимальну з множин вигляду

$$\{y \in Y : \forall F_1, F_2 \in \mathcal{M}_0(X), F_1 \cap F_2 = \emptyset, \\ \exists h \in \mathrm{C}(X,Y) \mid h|_{F_1} = a \text{ і } h|_{F_2} = y\}$$

і позначимо її G_a. Зауважимо, що $a \in G_a$.

Покажемо, що множина G_a відкрита в Y. Дійсно, нехай $y \in G_a$ і $h_1 : X \to Y$ — неперервне відображення, таке, що $h_1|_A = a$ і $h_1|_C = y$. Оскільки Y — локально слабкий склеювач, то існує окіл U точки y, такий, що для кожного $u \in U$ можна вибрати неперервне відображення $h : X \to Y$, таке, що $h|_C = y$ і $h|_B = u$. Нехай $u \in U$ і $h_2 : X \to Y$ — неперервне відображення, таке, що $h_2|_C = y$ і $h_2|_B = u$. Покладемо $h(x) = h_1(x)$, якщо $x \in \varphi^{-1}\big([0, \frac{1}{2})\big)$, і $h(x) = h_2(x)$, якщо $x \in \varphi^{-1}\big([\frac{1}{2}, 1]\big)$. Тоді відображення $h : X \to Y$ неперервне, причому $h|_A = a$ і $h|_B = u$. З максимальності множини G_a випливає, що $u \in G_a$. Отже, $U \subseteq G_a$.

Розглянемо на просторі Y відношення $a \sim b \Leftrightarrow a \in G_b$. Зрозуміло, що $a \in G_b$ тоді і тільки тоді, коли $b \in G_a$ для довільних $a, b \in Y$. Нескладно перевіряється, що якщо $a \sim b$ і $b \sim c$, то $a \sim c$ для всіх $a, b, c \in Y$. Отже, $\sim$ є відношенням еквівалентності на Y. Звідси випливає, що для будь-яких різних $a, b \in Y$ множини G_a та G_b або збігаються, або не перетинаються.

Таким чином, G_a — це компонента зв'язності простору Y для довільного $a \in Y$. Оскільки простір Y зв'язний, то $G = Y$. Звідси випливає, що Y — слабкий склеювач для простору X. $\square$

3. Узагальнення теореми Лебеґа-Гаусдорфа для відображень першого класу

Лема 3.1. *Нехай X — топологічний простір, (Y,d) — метричний простір і $f : X \to Y$ — деяке відображення. Припустимо, що для деякого $n \geq 2$ існують sfd сім'ї $\mathscr{A}_0, \mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_n$ функціонально замкнених множин в X і відображення $p_k : \mathscr{A}_k \to Y$, які для задовольняють умови:*

(A) *$\mathscr{A}_0$ складається з однієї множини X;*

(B) *$\mathscr{A}_{k+1} \prec \mathscr{A}_k$ для кожного $k < n$;*

(C) *$\sup\limits_{x\in A} d\big(f(x), p_k(A)\big) < \frac{1}{2^{k+2}}$ для всіх $k \leq n$ та $A \in \mathscr{A}_k$;*

(D) *для всіх $A \in \mathscr{A}_{k+1}$ та $A' \in \mathscr{A}_k$ з умовою $A \subseteq A'$ існує неперервна функція $h : X \to Y$, така, що $h|_A = p_{k+1}(A)$ і $h|_{A'} = p_k(A')$, причому $\operatorname{diam} h(X) < \frac{1}{2^{k+2}}$ якщо $k \in \{1, \ldots, n-1\}$.*

Тоді існує неперервне відображення $g : X \to Y$, таке, що з включення $x \in \cup\mathscr{A}_k$ для $k \in \{1, \ldots, n\}$ випливає нерівність

$$d\big(f(x), g(x)\big) < \frac{1}{2^k}. \tag{3.1}$$

Доведення. Для кожного $k \in \{1, \ldots, n\}$ та $A \in \mathscr{A}_k$ виберемо неперервну функцію $\psi_{A,k} : X \to [0,1]$, таку, щоб $A \subseteq \psi^{-1}_{A,k}(0)$, а сім'я

$$\big(\psi^{-1}_{A,k}\big([0,1)\big) : A \in \mathscr{A}_k\big)$$

була дискретною. Покладемо $\varphi_{A,1} = \psi_{A,1}$ для кожного $A \in \mathscr{A}_1$. Тепер для кожного $A \in \mathscr{A}_2$ виберемо $A' \in \mathscr{A}_1$, таке, що $A \subseteq A'$ і покладемо

$$U_{A,2} = \psi^{-1}_{A,2}\big([0,1)\big) \cap \varphi^{-1}_{A',1}\big([0,\tfrac{1}{2})\big).$$

Існує неперервна функція $\varphi_{A,2} : X \to [0,1]$, така, що

$$\varphi^{-1}_{A,2}(0) = \psi^{-1}_{A,2}(0), \qquad \varphi^{-1}_{A,2}\big([0,1)\big) = U_{A,2}.$$

Продовжуючи цей процес до нескінченності, ми отримаємо послідовність сімей $(\varphi_{A,k} : A \in \mathcal{A}_k)_{1\leq k\leq n}$ неперервних функцій $\varphi_{A,k} : X \to [0,1]$, таку, що для всіх $k \in \{2, \ldots, n\}$ та $A \in \mathscr{A}_k$ існує $A' \in \mathscr{A}_{k-1}$, таке, що $A \subseteq A'$ і

$$A \subseteq \varphi^{-1}_{A,k}(0) \subseteq \varphi^{-1}_{A,k}\big([0,1)\big) \subseteq \varphi^{-1}_{A',k-1}\big([0,\tfrac{1}{2})\big), \tag{3.2}$$

і сім'я $(U_{A,k} : A \in \mathscr{A}_k)$ дискретна, де $U_{A,k} = \varphi^{-1}_{A,k}\big([0,1)\big)$. Для кожного k покладемо

$$U_k = \bigcup_{A\in\mathscr{A}_k} U_{A,k}, \qquad E_k = X \setminus U_k$$

і для кожного $x \in X$ нехай

$$g_0(x) = p_0(X).$$

Припустимо, що при $k < n$ вже визначені неперервні відображення

$$g_1, \dots, g_k : X \to Y$$

такі, що $g_k(x) = g_{k-1}(x)$ для $x \in E_k$ і $g_k(x) = p_k(A)$, якщо $x \in \varphi^{-1}_{A,k}\big([0, \frac{1}{2}]\big)$ для деякого $A \in \mathscr{A}_k$. З умови (D) випливає, що для кожного $A \in \mathscr{A}_{k+1}$ існують множина $A' \in \mathscr{A}_k$ з властивістю $A \subseteq A'$, і неперервне відображення $h_{A,k+1} : X \to Y$ з діаметром образу меншим за $\frac{1}{2^{k+2}}$, такі, що

$$h_{A,k+1}|_A = p_{k+1}(A), \qquad h_{A,k+1}|_{X \setminus U_{A,k+1}} = p_k(A').$$

Визначимо неперервне відображення $g_{k+1} : X \to Y$ формулою

$$g_{k+1}(x) = \begin{cases} g_k(x), & \text{якщо } x \in E_{k+1}, \\ h_{A,k+1}(x), & \text{якщо } x \in U_{A,k+1} \text{ для деякого } A \in \mathscr{A}_{k+1}. \end{cases}$$

Зауважимо, що має місце нерівність

$$d\big(g_{k+1}(x), g_k(x)\big) < \frac{1}{2^{k+2}} \tag{3.3}$$

для всіх $1 \le k < n$ і $x \in X$. Справді, очевидно, що (3.3) вірна при $x \in E_{k+1}$. Якщо $x \in U_{A,k+1}$ для $A \in \mathscr{A}_{k+1}$, то $x \in \varphi^{-1}_{A',k}\big([0, \frac{1}{2})\big)$ і тоді

$$g_{k+1}(x) = h_{A,k+1}(x), \qquad g_k(x) = p_k(A') \in h_{A,k+1}(X).$$

Отже, з властивості (D) випливає нерівність (3.3).

Продовжуючи індуктивно, ми отримаємо неперервні відображення $g_1, \dots, g_n : X \to Y$, такі, що $g_k|_A = p_k(A)$ для всіх $k \in \{0, \dots, n\}$ та $A \in \mathscr{A}_k$.

Покладемо $g = g_n$ і покажемо, що виконується нерівність (3.1). Нехай $1 \le k \le n$ і $x \in \cup\mathscr{A}_k$. Тоді $x \in A$ для деякого $A \in \mathscr{A}_k$. Звідси випливає, що $g_k(x) = p_k(A)$, тому

$$d\big(f(x), g_k(x)\big) \le \frac{1}{2^{k+2}}$$

за умовою (C). Врахувавши (3.3), ми одержимо нерівність

$$\begin{aligned} d\big(f(x), g_n(x)\big) &\le d\big(f(x), g_k(x)\big) + \sum_{i=k}^{n-1} d\big(g_i(x), g_{i+1}(x)\big) \\ &< \frac{1}{2^{k+2}} + \frac{1}{2^{k+1}} < \frac{1}{2^k}, \end{aligned}$$

яка і завершує доведення леми. $\square$

Теорема 3.2. *Нехай X — топологічний простір і Y — метризовний слабкий склеювач і локально слабкий склеювач для X. Тоді*

$$\Sigma_1^s(X,Y) \subseteq \mathrm{B}_1(X,Y). \tag{3.4}$$

Доведення. Нехай d — метрика на просторі Y, яка породжує його топологічну структуру. Для кожного $k \in \mathbb{N}$ виберемо покриття $\mathscr{U}_k$ простору Y відкритими множинами діаметру $< \frac{1}{2^{k+2}}$.

Розглянемо відображення $f \in \Sigma_1^s(X,Y)$ і σ-sfd базу $\mathscr{B}$ цього відображення, що складається з функціонально замкнених підмножин простору X. Для кожного $k \in \mathbb{N}$ покладемо

$$\mathscr{B}_k = \{B \in \mathscr{B} : B \subseteq f^{-1}(U) \text{ для деякого } U \in \mathscr{U}_k\}.$$

Тоді $\mathscr{B}_k$ — це σ-sfd сім'я, причому $X = \cup\mathscr{B}_k$ для кожного k. Згідно з [9, лема 13] для кожного $k \in \mathbb{N}$ існує послідовність $(\mathscr{B}_{k,n})_{n=1}^{\infty}$ sfd сімей функціонально замкнених множин в X, така, що для кожного $n \in \mathbb{N}$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathscr{B}_{k,n} \prec B_k, \qquad \mathscr{B}_{k,n} \prec \mathscr{B}_{k,n+1}, \qquad \bigcup \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathscr{B}_{k,n} = X.$$

Для довільних $k, n \in \mathbb{N}$ покладемо

$$\mathscr{A}_{k,n} = \{B_1 \cap \dots \cap B_k : B_m \in \mathscr{B}_{m,n}, 1 \le m \le k\}.$$

Зауважимо, що кожна сім'я $\mathscr{A}_{k,n}$ сильно функціонально дискретна, складається з функціонально замкнених множин, причому

(a) $\mathscr{A}_{k+1,n} \prec \mathscr{A}_{k,n}$,

(b) $\mathscr{A}_{k,n} \prec \mathscr{A}_{k,n+1}$,

(c) $\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup \mathscr{A}_{k,n} = X$.

Зафіксуємо $n \ge 2$ і для кожного $k = 1, \dots, n$ позначимо $\mathscr{A}_k = \mathscr{A}_{k,n}$ і $\mathscr{A}_0 = \{X\}$. Виберемо довільне $y_0 \in Y$ і покладемо $p_0(X) = y_0$. Для кожного $A \in \mathscr{A}_1$ виберемо $U_A \in \mathscr{U}_1$, таке, що $f(A) \subseteq U_A$. Візьмемо довільне $y_A \in U_A$ і покладемо $p_1(A) = y_A$.

Тепер для кожного $A \in \mathscr{A}_2$ виберемо $A' \in \mathscr{A}_1$, таке, що $f(A) \subseteq f(A')$ і $U_A \in \mathscr{U}_2$, таке, що $f(A) \subseteq U_A$. Зафіксуємо довільну точку $y_A \in U_A \cap U_{A'}$ і покладемо $p_2(A) = y_A$.

Продовжуючи цей процес до нескінченності, ми отримаємо відображення $p_k : \mathscr{A}_k \to Y$, які для кожного $k \in \{0, \dots, n\}$ задовольняють умови леми 3.1. Таким чином, існує неперервне відображення $g_n : X \to Y$, таке, що з включення $x \in \cup\mathscr{A}_{k,n}$ при $k \le n$ випливає нерівність

$$d\big(f(x), g_n(x)\big) < \frac{1}{2^k}.$$

Доведемо, що послідовність $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ поточково збігається до відображення f на X. Зафіксуємо $x \in X$ і $\varepsilon > 0$. Знайдемо таке $k \in \mathbb{N}$, що $\frac{1}{2^k} < \varepsilon$. З умов (b) і (c) випливає, що існує таке $n_0 \geq k$, що $x \in \mathscr{A}_{k,n}$ для всіх $n \geq n_0$. Тоді для всіх $n \geq n_0$ маємо, що $d\big(f(x), g_n(x)\big) < \frac{1}{2^k} < \varepsilon$.

Оскільки g_n неперервне, то $f \in \mathrm{B}_1(X,Y)$. $\square$

З теореми 3.2 і [10, теорема 2.5] ми отримуємо наступне узагальнення теореми Лебеґа-Гаусдорфа для відображень зі значеннями у просторах-склеювачах.

Теорема 3.3. *Нехай X — топологічний простір і Y — метризовний слабкий склеювач і слабкий локальний склеювач для X. Тоді*

$$\mathrm{K}_1(X,Y) \cap \Sigma^s(X,Y) = \mathrm{B}_1(X,Y).$$

4. Δ-замкнені системи і випадок нескінченного α

Для відображень f, g між топологічними просторами X та Y визначимо відображення $f\Delta g : X \to Y^2$ наступним чином:

$$(f\Delta g)(x) = \big(f(x), g(x)\big)$$

для кожного $x \in X$.

Для $i \in \{0,1\}$ розглянемо проекцію $\pi_i : Y^2 \to Y$, яка діє за правилом $\pi_i(y_0, y_1) = y_i$ для всіх $y_0, y_1 \in Y$.

Означення 4.1. Систему $\mathscr{F}$ відображень між топологічними просторами X та Y назвемо

- *Δ-замкненою*, якщо $h \circ (f\Delta g) \in \mathscr{F}$ для довільного неперервного відображення $h : Y^2 \to Y$ і довільних $f, g \in \mathscr{F}$;
- *π-замкненою*, якщо для довільної відкритої множини $V \subseteq Y$ і довільних $f, g, \varphi \in \mathscr{F}$ відображення $h = \pi_{\chi_{X\setminus\varphi^{-1}(V)}} \circ (f\Delta g) : X \to Y$, яке задається формулою
$$h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \varphi^{-1}(V), \\ g(x), & x \in X \setminus \varphi^{-1}(V), \end{cases}$$
також належить до системи $\mathscr{F}$.

Приклади Δ-замкнених і π-замкнених систем.

- $\mathrm{B}_\alpha(X,Y)$ та $\Sigma^s_\alpha(X,Y)$ — π-замкнені системи для всіх $\alpha \in [0,\omega_1)$.
- $\Sigma_{<\alpha}(X,Y)$ при $\alpha \in (0,\omega_1)$, а також система всіх скінченнозначних неперервних відображень між X та Y є Δ-замкненими і π-замкненими системами.

- $B_1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ не є π-замкненою системою: нехай $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — функція Рімана, $\varphi(x) = \frac{1}{n}$ при $x = q_n \in \mathbb{Q} = \{q_k : k \in \mathbb{N}\}$, і $\varphi(x) = 0$ при $x \notin \mathbb{Q}$, $f \equiv 1$ і $g \equiv 0$ на $\mathbb{R}$. Тоді для $V = (0,2)$ ми маємо, що $h = \pi_{\chi_{X\setminus\varphi^{-1}(V)}} \circ (f\Delta g) = \chi_{\mathbb{Q}} \notin B_1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Означення 4.2. Метричний простір (Y,d) називається *R-простором*, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує неперервне відображення $r_\varepsilon : Y \times Y \to Y$, яке задовольняє умови

$$d(y,z) \le \varepsilon \implies r_\varepsilon(y,z) = y, \tag{4.1}$$

$$d(r_\varepsilon(y,z),z) \le \varepsilon \tag{4.2}$$

для всіх $y, z \in Y$.

Зауважимо, що довільний опуклий підпростір Y нормованого простору $(Z, \|\cdot\|)$ є R-простором, де відображення r_ε визначається так:

$$r_\varepsilon(y,z) = \begin{cases} z + (\varepsilon/\|y-z\|)\cdot(y-z), & \|y-z\| > \varepsilon, \\ y, & \text{інакше.} \end{cases}$$

Теорема 4.3. *Нехай X — топологічний простір, (Y,d) — метричний простір, відображення $f : X \to Y$ є рівномірною границею послідовності відображень $f_n : X \to Y$ і $\mathscr{F}$ — π-замкнена система відображень між X та Y. Якщо виконується одна з наступних умов:*

(1) *$f_n \in \overline{\mathscr{F}}^{\,\mathrm{st}}(X,Y)$ для кожного $n \in \mathbb{N}$ і $\mathscr{F}$ — π-замкнена, або*

(2) *$f_n \in \overline{\mathscr{F}}^{\,\mathrm{p}}(X,Y)$ для кожного $n \in \mathbb{N}$ і (Y,d) — R-простір,*

то $f \in \overline{\mathscr{F}}^{\,\mathrm{p}}$.

Доведення. (1) Без обмеження загальності можемо вважати, що

$$d\big(f_n(x), f(x)\big) < \frac{1}{2^{n+1}}$$

для всіх $x \in X$ та $n \in \mathbb{N}$. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ виберемо послідовність відображень $f_{n,m} \in \mathscr{F}$, таку, що

$$f_{n,m} \xrightarrow[m\to\infty]{\mathrm{st}} f_n$$

на X.

Для кожного $x \in X$ покладемо $h_{1,m}(x) = f_{1,m}(x)$ при $m \in \mathbb{N}$.

Нехай для деякого $n \in \mathbb{N}$ вже визначені послідовності $(h_{k,m})_{m=1}^{\infty}$ для всіх $1 \le k \le n$ відображень, такі, що

(a) $h_{k,m} \xrightarrow{\mathrm{st}} f_k$ для всіх $1 \le k \le n$;

(b) $h_{k,m} \in \mathscr{F}$ для всіх $1 \le k \le n$ та $m \in \mathbb{N}$;

(c) $d\big(h_{k+1,m}(x), h_{k,m}(x)\big) < \frac{1}{2^k}$ для всіх $1 \le k < n$, $m \in \mathbb{N}$ та $x \in X$.

Для кожного $m \in \mathbb{N}$ розглянемо відображення $\varphi_m = d \circ (f_{n+1,m} \Delta h_{n,m})$ і зауважимо, що $\varphi_m \in \mathscr{F}$, оскільки система $\mathscr{F}$ є π-замкненою. Покладемо

$$A_m = \varphi_m^{-1}\big((-\infty, \tfrac{1}{2^n})\big)$$

і для всіх $x \in X$ визначимо

$$h_{n+1,m}(x) = \begin{cases} f_{n+1,m}(x), & \text{якщо } x \in A_m, \\ h_{n,m}(x), & \text{якщо } x \notin A_m. \end{cases}$$

Перевіримо умову (a) для послідовності $(h_{n+1,m})_{m=1}^{\infty}$. Якщо $x \in X$, то існує номер m_0, такий, що $f_{n+1,m}(x) = f_{n+1}(x)$ і $f_{n,m}(x) = f_n(x)$ для всіх $m \geq m_0$. Тоді

$$d\big(f_{n+1,m}(x), h_{n,m}(x)\big) = d\big(f_{n+1}(x), f_n(x)\big) < \frac{1}{2^n}$$

для всіх $m \geq m_0$. Отже, $x \in A_m$ для всіх $m \geq m_0$. Тому

$$h_{n+1,m}(x) = f_{n+1,m}(x),$$

звідки випливає, що

$$h_{n+1,m} \xrightarrow[m\to\infty]{\text{st}} f_{n+1}$$

на X.

Умова (b) для послідовності $(h_{n+1,m})_{m=1}^{\infty}$ випливає з π-замкненості системи $\mathscr{F}$.

Перевіримо умову (c). Нехай $x \in X$ і $m \in \mathbb{N}$. Якщо $x \in A_m$, то $h_{n+1,m}(x) = f_{n+1,m}(x)$, а якщо $x \notin A_m$, то $h_{n+1,m}(x) = h_{n,m}(x)$. В обох випадках

$$d\big(h_{n+1,m}(x), h_{n,m}(x)\big) < \tfrac{1}{2^n}.$$

Таким чином, ми побудували послідовності відображень $(h_{n,m})_{m=1}^{\infty}$, які задовольняють умови (a)-(c) для кожного $n \in \mathbb{N}$.

Доведемо тепер, що $h_{n,n} \longrightarrow f$ поточково на X. Зафіксуємо $x \in X$ та $\varepsilon > 0$. Виберемо таке $n_0 \in \mathbb{N}$, що

$$d\big(f(x), f_{n_0}(x)\big) < \frac{1}{2^{n_0}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Крім того, існує таке $n_1 \geq n_0$, що

$$h_{n_0,n}(x) = f_{n_0}(x)$$

для всіх $n \geq n_1$. Таким чином, для всіх $n \geq n_1$ маємо

$$d\big(f(x), h_{n,n}(x)\big) \leq d\big(f(x), f_{n_0}(x)\big) + \sum_{k=n_0}^{n-1} d\big(h_{k,n}(x), h_{k+1,n}(x)\big) <$$

$$< \frac{1}{2^{n_0}} + \frac{1}{2^{n_0}} < \varepsilon.$$

Отже, $f \in \overline{\mathcal{F}}^{\mathrm{p}}$.

(2) Нехай $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ — послідовність неперервних функцій

$$r_n : Y \times Y \to Y,$$

яка задовольняє умови

$$d(y,z) \le \frac{1}{2^n} \implies r_n(y,z) = y, \tag{4.3}$$

$$d(r_n(y,z),z) \le \frac{1}{2^n} \tag{4.4}$$

для всіх $y, z \in Y$ та $n \in \mathbb{N}$.

Розглянемо довільну послідовність $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ відображень $f_n \in \overline{\mathcal{F}}^{\mathrm{p}}$, яка рівномірно збігається до відображення $f : X \to Y$. Виділяючи при необхідності підпослідовність, вважатимемо, що

$$d\big(f_n(x), f_{n+1}(x)\big) \le \frac{1}{2^{n+1}}$$

для всіх $n \in \mathbb{N}$. Виберемо для кожного n таку послідовність відображень $f_{n,m} \in \mathscr{F}$, що $\lim\limits_{m\to\infty} f_{n,m}(x) = f_n(x)$ для всіх $x \in X$.

Для $x \in X$ і $m \in \mathbb{N}$ покладемо

$$h_{1,m}(x) = f_{1,m}(x),$$

$$h_{n,m}(x) = r_{n-1}\big(f_{n,m}(x), h_{n-1,m}(x)\big),$$

при $n > 1$. Тоді $h_{n,m} \in \mathcal{F}$ для всіх n, m. Крім того, для кожного $n \in \mathbb{N}$ і для всіх $x \in X$ виконується нерівність

$$d\big(h_{n+1,m}(x), h_{n,m}(x)\big) \le \frac{1}{2^n}.$$

Нехай $x \in X$. Покажемо, що для кожного $n \in \mathbb{N}$ існує номер m_n, такий, що $h_{n,m}(x) = f_{n,m}(x)$ для всіх $m \ge m_n$. При $n = 1$ твердження виконується.

Припустимо, що $n > 1$ і $h_{n-1,m}(x) = f_{n-1,m}(x)$ при $m \ge m_{n-1}$. Оскільки $f_{n,m}(x) \to f_n(x)$, а $f_{n-1,m}(x) \to f_{n-1}(x)$, то існує номер m_0, такий, що для всіх $m \ge m_0$

$$d\big(f_{n,m}(x), f_n(x)\big) < \frac{1}{2^{n+1}},$$

$$d\big(f_{n-1,m}(x), f_{n-1}(x)\big) < \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Покладемо $m_n = \max\{m_0, m_{n-1}\}$. Тоді

$$d\big(f_{n,m}(x), h_{n-1,m}(x)\big) = d\big(f_{n,m}(x), f_{n-1,m}(x)\big) \le$$

$$\le d\big(f_{n,m}(x), f_n(x)\big) + d\big(f_n(x), f_{n-1}(x)\big) + d\big(f_{n-1}(x), f_{n-1,m}(x)\big) \le$$

$$\leq \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

для всіх $m \geq m_n$. Звідси випливає, що

$$h_{n,m}(x) = r_{n-1}\big(f_{n,m}(x), h_{n-1,m}(x)\big) = f_{n,m}(x)$$

для всіх $m \geq m_n$. Отже, $\lim\limits_{m\to\infty} h_{n,m}(x) = f_n(x)$ для кожного $n \in \mathbb{N}$.

Далі, покажемо, що $\lim\limits_{n\to\infty} h_{n,n}(x) = f(x)$. Візьмемо $\varepsilon > 0$. Існує номер $n_0 \in \mathbb{N}$, такий, що $\frac{1}{2^{n_0-1}} < \frac{\varepsilon}{3}$ і $d\big(f_{n_0}(x), f(x)\big) \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Оскільки

$$\lim_{n\to\infty} h_{n_0,n}(x) = f_{n_0}(x),$$

то існує $m_0 > n_0$, таке, що для всіх $n \geq m_0$ виконується нерівність $d\big(h_{n_0,n}(x), f_{n_0}(x)\big) \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Тоді при $n \geq m_0$ маємо

$$d\big(h_{n,n}(x), f(x)\big) \leq$$

$$\leq \sum_{i=n_0}^{n-1} d\big(h_{i+1,n}(x), h_{i,n}(x)\big) + d\big(h_{n_0,n}(x), f_{n_0}(x)\big) + d\big(f_{n_0}(x), f(x)\big) <$$

$$< \sum_{i=n_0}^{n-1} \frac{1}{2^i} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \frac{1}{2^{n_0-1}} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

Таким чином, $f \in \overline{\mathcal{F}}^{\mathrm{p}}$. □

Теорема 4.4. *Нехай X — топологічний простір і (Y, d) — метричний простір. Якщо*

(1) Y — *слабкий склеювач і локально слабкий склеювач для X, або*
(2) Y — *R-простір,*

то клас $\mathrm{B}_1(X, Y)$ замкнений відносно рівномірних границь.

Доведення. Нехай $(f_n)_{n\in\omega} \subset \mathrm{B}_1(X, Y)$ — послідовність відображень, яка поточково збігається до f на просторі X.

У випадку (1) маємо включення $f_n \in \Sigma_1^s(X, Y) = \mathrm{K}_1(X, Y) \cap \Sigma^s(X, Y)$. Оскільки клас функцій $\mathrm{K}_1(X, Y)$ замкнений відносно рівномірних границь, а клас $\Sigma^s(X, Y)$ замкнений навіть відносно поточкових границь, то $f \in \mathrm{K}_1(X, Y) \cap \Sigma^s(X, Y)$. Залишилось застосувати теорему 3.3.

У другому випадку необхідно застосувати теорему 4.3(2). □

Розглянемо деякий клас відображень $\mathscr{F} = \mathscr{F}(X, Y)$ між просторами X та Y. Покладемо

$$\Pi_1(\mathscr{F}) = \mathscr{F}$$

і визначимо індуктивно класи $\Pi_\alpha(\mathscr{F})$ для всіх $\alpha \in [1, \omega_1)$ наступним чином:

$$\Pi_\alpha(\mathscr{F}) = \overline{\bigcup_{\beta<\alpha} \Pi_\beta(\mathscr{F})}^{\mathrm{p}}.$$

- Якщо $\mathscr{F}(X,Y) = \Sigma_1^s(X,Y)$, то класи $\Pi_\alpha(\mathscr{F})$ ми будемо позначати символом $\Lambda_\alpha(X,Y)$.
- Якщо $\mathscr{F}(X,Y) = \mathrm{H}_1(X,Y)$, то класи $\Pi_\alpha(\mathscr{F})$ позначаються через $\Phi_\alpha^*(X,Y)$ [7, с. 196].
- Якщо $\mathscr{F}(X,Y) = \overline{\mathrm{C}(X,Y)}^{\mathrm{p}}$, то класи $\Pi_\alpha(\mathscr{F})$ при $\alpha \in [1, \omega_1)$ — це класи Бера.

Виведемо тепер з теореми 4.3 наступний результат, який є узагальненням теореми Банаха про аналітично зображувані функції для нескінченного ординала α (див. також [9, теорема 22]).

Теорема 4.5. *Нехай X — топологічний простір, (Y,d) — метричний простір і $\alpha \in [\omega_0, \omega_1)$. Тоді*

$$\Sigma_{\alpha+1}^s(X,Y) \subseteq \Lambda_\alpha(X,Y). \tag{4.5}$$

Доведення. Розглянемо випадок, коли $\alpha \geq \omega_0$ — граничний ординал.

Нехай $f \in \Sigma_{\alpha+1}^s(X,Y)$. Згідно з [9, лема 15] існує послідовність відображень $f_n \in \overline{\Sigma_{<\alpha}^s(X,Y)}^{\mathrm{st}}$, яка рівномірно прямує до f на X. Оскільки система $\Sigma_{<\alpha}^s(X,Y)$ є Δ-замкненою і π-замкненою, то $f \in \overline{\Sigma_{<\alpha}^s(X,Y)}^{\mathrm{p}}$ за теоремою 4.3. Отже, у випадку граничного α існує послідовність відображень $(g_n)_{n=1}^\infty$, яка поточково збігається до f на просторі X, і кожне відображення g_n належить до класу $\Sigma_{<\alpha}^s(X,Y)$.

Тоді при $\alpha = \omega_0$ з [9, теорема 17(i)] випливає, що $g_n \in \Lambda_{<\omega_0}(X,Y)$ для кожного n, звідки $f \in \Lambda_{\omega_0}(X,Y)$.

Припустимо, що включення (4.5) вірне для всіх $\beta \in [\omega_0, \alpha)$ і доведемо його для $\alpha > \omega_0$.

Якщо α — граничне, то $g_n \in \Sigma_{<\alpha}^s(X,Y) \subseteq \Sigma_{<\alpha+1}^s(X,Y) \subseteq \Lambda_{<\alpha}(X,Y)$ для кожного $n \in \mathbb{N}$ за індуктивним припущенням. Отже, $f \in \Lambda_\alpha(X,Y)$. Звідси випливає, що включення (4.5) вірне для граничних ординалів α.

Нехай $\alpha = \beta+m$, де β — граничний ординал і $m \in \mathbb{N}$ і $f \in \Sigma_{\alpha+1}^s(X,Y)$. Тоді міркуючи аналогічно як при доведенні потрібного включення для скінченних α (див. [9, теорема 17(i)]), можна показати, що існує послідовність відображень $g_n \in \Sigma_{\beta+m}^s(X,Y)$, яка поточково збігається до відображення f на X. За індуктивним припущенням, $g_n \in \Lambda_{\beta+m-1}(X,Y)$, звідки випливає, що $f \in \Lambda_\alpha(X,Y)$. $\square$

Наступний результат є найзагальнішою на сьогодні версією теореми Лебеґа-Гаусдорфа-Банаха про рівність берівських та борелівських класів функцій.

Теорема 4.6. *Нехай $\alpha \in [0, \omega_1)$, X — топологічний простір, Y — метризовний слабкий склеювач і локально слабкий склеювач для X. Тоді*

$$\mathrm{B}_\alpha(X,Y) = \begin{cases} \Sigma^s_\alpha(X,Y), & \text{якщо } \alpha \in [0,\omega_0), \\ \Sigma^s_{\alpha+1}(X,Y), & \text{якщо } \alpha \in [\omega_0,\omega_1). \end{cases}$$

Доведення. При $\alpha = 0$ твердження очевидне.

Випадок $\alpha = 1$ доведений в теоремі 3.3. Зауважимо, що з нього випливає рівність $\mathrm{B}_1(X,Y) = \Lambda_1(X,Y)$, якщо Y — метризовний слабкий склеювач і локально слабкий склеювач для X, з якої, в свою чергу, випливає рівність $\mathrm{B}_\alpha(X,Y) = \Lambda_\alpha(X,Y)$ для всіх $\alpha \in [1,\omega_1)$. Залишилось застосувати [9, теорема 22]. □

5. Застосування склеювачів до берівської класифікації фрагментовних функцій

Нехай X та Y — топологічні простори.

Означення 5.1. Відображення $f : X \to Y$ називається

- *насичено неперервним*, якщо звуження $f|_F$ на довільну замкнену непорожню множину $F \subseteq X$ має точку неперервності;
- *точково розривним*, якщо множина $C(f)$ всіх точок неперервності відображення f є всюди щільною в X.

Означення 5.2. Відображення $f : X \to Y$ між топологічним простором X і метричним простором Y називається *фрагментовним* [14], якщо для кожного $\varepsilon > 0$ і довільної непорожньої замкненої множини $F \subseteq X$ існує така відносно відкрита множина $U \subseteq F$, що $\mathrm{diam} f(U) < \varepsilon$.

Очевидно, що кожне насичено неперервне відображення між топологічним і метричним просторами фрагментовне. Якщо X — спадково берівський простір, то кожне фрагментовне відображення є насичено неперервним. При цьому умова беровості є істотною, як показує приклад функції $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, $f(r_n) = 1/n$, де $\mathbb{Q} = \{r_n : n \in \mathbb{N}\}$ — множина всіх раціональних чисел. Ця функція є фрагментовною і скрізь розривною.

Зауважимо також, що для спадково берівського простору X поняття точкової розривності звуження відображення f на довільну замкнену множину $F \subseteq X$ рівносильне фрагментовності цього відображення.

Якщо ж X — не берівський, то поняття фрагментовності є слабшим, ніж точкова розривність на кожній замкненій множині.

Справді, розглянемо топологію τ на числовій прямій, базу околів $\mathscr{U}_x$ точки $x \in \mathbb{R}$ в якій утворюють множини вигляду

$$\{(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap \mathbb{Q} : \varepsilon > 0\},$$

якщо $x \in \mathbb{Q}$, і

$$\{(x-\varepsilon, x+\varepsilon) : \varepsilon > 0\},$$

якщо $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Тоді $\mathbb{Q}$ — це відкритий щільний в $X = (\mathbb{R}, \tau)$ підпростір першої категорії. Нехай тепер $f : X \to \mathbb{R}$ — це функція Рімана. Тоді $\overline{C(f)} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, отже, f не є точково розривним. З іншого боку, якщо F — замкнена підмножина простору X, яка перетинається з множиною ірраціональних чисел, то $C(f|_F) \cap C(f) \neq \emptyset$, а якщо $F \subseteq \mathbb{Q}$, то ця множина замкнена в звичайній топології на $\mathbb{R}$, звідки випливає, що F має ізольовану точку, яка і є точкою неперервності звуження $f|_F$. Таким чином, f — фрагментовне.

Лема 5.3. *Нехай X — топологічний простір, Y — метризовний слабкий і локально слабкий склеювач для X, $G \subseteq X$ — функціонально відкрита множина, $y_0 \in Y$ і $g \in \mathrm{B}_1(G, Y)$. Тоді формулою*

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & \textit{якщо } x \in G, \\ y_0, & \textit{якщо } x \in X \setminus G \end{cases}$$

визначається продовження $f \in \mathrm{B}_1(X, Y)$ відображення g.

Доведення. Покажемо, що $f \in \Sigma_1^s(X, Y)$. Згідно з [3, с. 88] існує банаховий простір Z і гомеоморфне вкладення $\varphi : Y \to Z$. Застосувавши [13, лема 8], ми отримаємо існування відображення $\widetilde{f} : X \to Z$ першого класу Бера, яке є продовженням g. Тоді $\widetilde{f} \in \Sigma_1^s(X, Z)$, а, отже, $f \in \Sigma_1^s(X, Y)$. Таким чином, $f \in \mathrm{B}_1(X, Y)$ за теоремою 4.6. $\square$

Означення 5.4. Нехай X — топологічний простір, (Y, d_Y) — метричний простір і $\varepsilon > 0$. Ми кажемо, що відображення $f : X \to Y$

- *наближається на ε функцією першого класу Бера на X*, якщо існує таке відображення $g \in \mathrm{B}_1(X, Y)$, що $d_Y\big(f(x), g(x)\big) \leq \varepsilon$ для кожного $x \in X$;
- *локально наближається на ε функціями першого класу Бера на X*, якщо для кожної точки $x \in X$ існує такий її окіл U_x, що звуження $f|_{U_x}$ наближається на ε функцією першого класу Бера на U_x.

Аналоги леми 5.5 і теореми 5.6 для стягуванного простору Y були доведені в [13].

Лема 5.5. *Нехай X — паракомпакт, (Y, d_Y) — метричний слабкий і локально слабкий склеювач для X, $\varepsilon > 0$ і функція $f : X \to Y$ локально наближається на ε функціями першого класу Бера. Тоді f наближається на ε функцією першого класу Бера на X.*

Доведення. З паракомпактності простору X випливає, що існує σ-дискретне покриття $\mathscr{U}$ простору X функціонально відкритими множинами [16], таке, що для кожного $U \in \mathscr{U}$ існує відображення $f_U \in \mathrm{B}_1(U, Y)$ з умовою $d_Y(f(x), f_U) \le \varepsilon$ для всіх $x \in U$. Нехай $\mathscr{U} = \bigcup_n \mathscr{U}_n$, де $\mathscr{U}_n$ — дискретна сім'я функціонально відкритих множин в X. Позначимо $U_n = \cup\mathscr{U}_n$ для кожного $n \in \mathbb{N}$ і зауважимо, що кожна множина U_n функціонально відкрита. Тому за лемою 5.3 для кожного $n \in \mathbb{N}$ відображення $f_n \in \mathrm{B}_1(U_n, Y)$, яке визначається рівністю

$$f_n(x) = f_U(x), \text{ якщо } x \in U \in \mathscr{U}_n,$$

можна продовжити до відображення $g_n \in \mathrm{B}_1(X, Y)$.

Покладемо

$$\mathscr{A}_1 = \mathscr{U}_1 \text{ і } \mathscr{A}_{n+1} = (U \setminus \cup\mathscr{U}_n : U \in \mathscr{U}_{n+1}) \text{ при } n \ge 1.$$

Тоді кожна множина $A_n = \cup\mathscr{A}_n$ є функціонально двосторонньою в X, причому сім'я $(A_n : n \in \mathbb{N})$ утворює розбиття простору X. Застосувавши [9, твердження 8], ми отримаємо, що формулою

$$g(x) = g_n(x), \text{ якщо } x \in A_n \text{ для деякого } n \in \mathbb{N}$$

визначається відображення $g \in \Sigma_1^s(X, Y)$. Таким чином, $g \in \mathrm{B}_1(X, Y)$ за теоремою 4.6. Крім того, для кожного $x \in X$ виконується нерівність

$$d_Y\big(f(x), g(x)\big) \le \varepsilon,$$

оскільки g є продовженням g_n, а g_n є продовженням f_n. □

Теорема 5.6. *Нехай X — досконалий паракомпакт, (Y, d) — метричний слабкий і локально слабкий склеювач для X і $f : X \to Y$ — фрагментовне відображення. Тоді $f \in \mathrm{B}_1(X, Y)$.*

Доведення. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ і покажемо, що відображення f локально наближається на ε функціями першого класу Бера. Нехай $\mathscr{G}$ — сукупність усіх відкритих підмножин простору X, на яких відображення f наближається на ε функціями першого класу, і $G = \cup\mathscr{G}$. Оскільки множина G є типу F_σ в X, то, використовуючи паракомпактність підпростору G і лему 5.5, ми отримаємо існування відображення $h \in \mathrm{B}_1(G, Y)$, такого, що

$$d_Y\big(h(x), f(x)\big) \le \varepsilon$$

для всіх $x \in G$.

Покладемо $F = X \setminus G$ і покажемо, що $F = \emptyset$. Припустимо, що це не так. Виберемо точку $x_0 \in F$ і відкритий окіл U_0 цієї точки, такий, що

$$d_Y\big(f(x), f(x_0)\big) < \varepsilon$$

для всіх $x \in U_0 \cap F$. Позначимо $y_0 = f(x_0)$. Згідно з лемою 5.3, відображення $g : X \to Y$, яке задається формулою

$$g(x) = \begin{cases} h(x), & x \in G, \\ y_0, & x \in F, \end{cases}$$

належить до першого класу Бера. Зауважимо, що

$$d_Y\big(f(x), g(x)\big) \leq \varepsilon$$

для всіх $x \in U_0$. Таким чином, $U_0 \subseteq G$. Зокрема, $x_0 \in G$, звідки випливає суперечність. Отже, $G = X$.

Таким чином, з леми 5.5 випливає, що існує послідовність $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ відображень першого класу Бера, така, що

$$d_Y\big(f(x), f_n(x)\big) \leq \frac{1}{n}.$$

Отже, f є рівномірною границею послідовності відображень першого класу Бера. Залишилось застосувати теорему 4.4. $\square$

6. Подяка

Автор висловлює вдячність анонімному рецензентові за корисні зауваження, які дозволили покращити виклад матеріалу статті.

Література

[1] R. Baire. Sur les fonctions de variables reélles. *Ann. Mat. Pura Appl.*, 3(3):1–123, 1899.

[2] S. Banach. Über analytisch darstellbare operationen in abstrakten räumen. *Fund. Math.*, 17(1):283–295, 1931.

[3] K. Borsuk. *Theory of retracts.* PWN - Polish Scientific Publisher, 1967.

[4] R. Engelking. *General Topology*, volume 46 of *Pure and applied mathematics.* Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

[5] M. Fosgerau. When are Borel functions Baire functions? *Fund. Math.*, 143(2):137–152, 1993.

[6] R. W. Hansell. Borel measurable mappings for nonseparable metric spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 161(1):145–169, 1971.

[7] R. W. Hansell. On Borel mappings and Baire functions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 194(1):195–211, 1974.

[8] F. Hausdorff. *Set Theory*, volume 46 of *Pure and applied mathematics.* Amer. Math. Soc., 1957.

[9] O. Karlova. Functionally σ-discrete mappings and a generalization of Banach's theorem. *Top. Appl.*, 189(1):92–106, 2015.

[10] O. Karlova. On Baire classification of mappings with values in connected spaces. *Eur. J. Math.*, 2(2):526–538, 2016.

[11] O. Karlova. On Baire-one mappings with zero-dimensional domains. *Colloq. Math.*, 147(1):129–142, 2017.
[12] O. Karlova, V. Mykhaylyuk. On stable Baire classes. *Acta Math. Hungar.*, 150(1):36–48, 2016.
[13] O. Karlova, V. Mykhaylyuk. On composition of Baire functions. *Top. Appl.*, 216(2):8–24, 2017.
[14] G. Koumoullis. A generalization of functions of the first class. *Top. Appl.*, 50(2):217–239, 1993.
[15] H. Lebesgue. Sur l'approximation des fonctions. *Bull. Sci. Math.*, 22(3):278–287, 1898.
[16] K. Morita. Paracompactness and product spaces. *Fund. Math.*, 50(2):223–236, 1962.
[17] S. Rolewicz. On inversion of non-linear transformations. *Studia Math.*, 17(2):79–83, 1958.
[18] C. Stegall. Functins of the first baire class with values in banach spaces. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 111(2):981–991, 1991.
[19] L. Veselý. Characterization of Baire-one functions between topological spaces. *Acta Univ. Carol., Math. Phys.*, 33(2):143–156, 1992.

Надійшла до редакції 15 листопада 2016, прийнята до друку 16 січня 2017.

Карлова Олена Олексіївна
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
Email: `maslenizza.ua@gmail.com`

Proceedings of the
International Geometry Center
Vol. 9, no. 3-4 (2016) pp. 37–49

Топологічні властивості частково метричних просторів

Вадим Мироник, Володимир Михайлюк

Abstract. We study topological properties of partial metrics and partial metric spaces. In particular, we investigate relations between the regularity of a partial metric space and continuity type properties of the corresponding partial metric. For mappings with values in a partial metric space we obtain an analogue of a theorem on G_δ-type of a set of the continuity points of mapping with values in a metrizable space and an analogue of a theorem on F_σ-measurability of a semicontinuous function.

Анотація. Ми вивчаємо топологічні властивості часткових метрик і частково метричних просторів, зокрема, досліджуємо зв'язок між регулярністю частково метричних просторів і різними аспектами неперервності часткової метрики. Для відображень зі значеннями у частково метричних просторах ми одержуємо аналоги теореми про G_δ-тип множини точок неперервності метризовнозначних відображень і теореми про F_σ-вимірність напівнеперервної функції.

1. Вступ

Поняття часткової метрики і частково метричного простору було введене С. Метьюсом [6], [7] у 1992 році. Це поняття виникло як певне послаблення поняття метричного простору і застосовувалось в дослідженнях семантики мов програмування, де виникають негаусдорфові топологічні моделі (дивись [10]).

Разом з тим частково метричні простори дістали широке застосування в теорії нерухомої точки (Fixed Point Theory) і інтенсивно використовуються для різних узагальнень теореми Банаха про нерухому точку [9], [2], [3], [5], [1].

2010 Mathematics Subject Classification: Mathematics Subject Classification: 54D10, 54E35

Ключові слова: часткова метрика, частково метричний простір, напівнеперервність, регулярність, метризовність

Слід зазначити, що загальні топологічні властивості частково метричних просторів у вищезгаданих роботах досліджені досить поверхово. Крім того, природно виникає питання про те, які з результатів з теорії метричних просторів переносяться без змін на випадок частково метричних просторів або мають свої аналоги у цьому загальнішому класі просторів.

В даній статті ми вивчаємо топологічні властивості часткових метрик, частково метричних просторів і зв'язок між ними. Також ми досліджуємо зв'язок між регулярністю частково метричних просторів і різними аспектами неперервності часткової метрики. Крім того, для відображень зі значеннями у частково метричних просторах ми доводимо аналоги теореми про G_δ-тип множини точок неперервності метризовно-значних відображень і теореми про F_σ-вимірність напівнеперервної функції.

2. Простіші топологічні властивості і приклади частково метричних просторів

Означення 2.1. Функція $p : X^2 \to \mathbb{R}$ називається *частковою метрикою на множині* X, якщо для довільних $x, y, z \in X$ виконуються наступні умови:

(p_1) $x = y \Leftrightarrow p(x,x) = p(x,y) = p(y,y)$;
(p_2) $p(x,x) \le p(x,y)$;
(p_3) $p(x,y) = p(y,x)$;
(p_4) $p(x,z) \le p(x,y) + p(y,z) - p(y,y)$.

Нехай (X,p) — частково метричний простір. Для кожного $x \in X$ і $\varepsilon > 0$ покладемо

$$B_p(x,\varepsilon) = \{y \in X : p(x,y) < p(x,x) + \varepsilon\}.$$

Система $\{B_p(x,\varepsilon) : \varepsilon > 0\}$ утворює базу околів деякої топології на просторі X, яка називається *топологією частково метричного простору.* При цьому всі множини $B_p(x,\varepsilon)$ є відкритими в частково метричному просторі (X,p).

Легко бачити, що часткова метрика p є метрикою, якщо $p(x,x) = 0$ для кожного $x \in X$. Крім того, у первісному означенні часткової метрики з [7] вимагається невід'ємність функції p, тобто $p(x,y) \ge 0$ для всіх $x, y \in X$. Але при введенні топології, породженої частковою метрикою p, невід'ємність функції p не використовується. Отже, з точки зору топології частково метричного простору (X,p) невід'ємність функції p є зайвою.

Будемо говорити, що точка x в топологічному просторі X *відокремлюється від точки* $y \in X$, якщо існує окіл U точки x такий, що $y \notin U$.

Твердження 2.2. *Нехай (X,p) — частково метричний простір. Тоді*

(1) *точка $x \in X$ відокремлюється від точки $y \in X$ тоді і тільки тоді, коли $p(x,y) > p(x,x)$;*
(2) *(X,p) — T_0-простір;*
(3) *(X,p) — T_1-простір тоді і тільки тоді, коли $p(x,y) > p(x,x)$ для довільних різних $x, y \in X$.*

Доведення. (1) З означення топологічної структури простору (X,p) випливає, що точка $x \in X$ відокремлюється від точки $y \in X$ тоді і тільки тоді, коли $p(x,y) \geq p(x,x) + \varepsilon$ для деякого $\varepsilon > 0$, тобто коли $p(x,y) > p(x,x)$.

(2) Виберемо довільні різні $x, y \in X$. Тоді з умов (p_1) і (p_2) випливає, що $p(y,x) > p(x,x)$ або $p(x,y) > p(y,y)$. Залишилось використати (1).

Умова (3) випливає безпосередньо з (1). □

Твердження 2.3. *Нехай (X,p) — частково метричний простір. Тоді функція $p : (X,p)^2 \to \mathbb{R}$ — сукупно напівнеперервна зверху на X^2 і неперервна відносно кожної змінної у всіх точках діагоналі*

$$\Delta = \{(x,x) : x \in X\}.$$

Доведення. Покажемо спочатку, що p — сукупно напівнеперервна функція. Зафіксуємо $x_0, y_0 \in X$ і $\varepsilon > 0$. Використовуючи умову (p_4) для довільних $x \in B_p(x_0, \varepsilon)$ і $y \in B_p(y_0, \varepsilon)$ одержимо

$$\begin{aligned} p(x,y) &\leq p(x,x_0) + p(x_0,y) - p(x_0,x_0) \\ &\leq p(x_0,x_0) + \varepsilon - p(x_0,x_0) + p(x_0,y_0) + p(y_0,y) - p(y_0,y_0) \\ &< p(x_0,y_0) + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Нарізна неперервність функції p у точках діагоналі Δ випливає з нерівності

$$0 \leq p(x,y) - p(x,x) < \varepsilon$$

для довільних $x \in X$, $\varepsilon > 0$ і $y \in B_p(x,\varepsilon)$. □

Нехай S — довільна множина. Через $l_1(S)$ ми позначаємо множину всіх функцій $x : S \to \mathbb{R}$ таких, що носій $\operatorname{supp} x = \{s \in S : x(s) \neq 0\}$ не більш, ніж зліченний і ряд $\sum\limits_{s \in S} x(s) = \sum\limits_{s \in \operatorname{supp} x} x(s)$ абсолютно збіжний.

Приклад 2.4. Наступні функції p є частковими метриками на відповідних множинах X:

(a) $X \subseteq \mathbb{R}$ і $p(x,y) = \max\{x,y\}$ для довільних $x, y \in X$;
(b) $X \subseteq \mathbb{R}$ і $p(x,y) = -\min\{x,y\}$ для довільних $x, y \in X$;

(c) $X \subseteq L_1([0,1])$ і $p(x,y) = \int\limits_0^1 \max\{x(t), y(t)\} d\mu(t)$ для довільних $x, y \in X$;

(d) $X \subseteq l_1(S)$ і $p(x,y) = \sum\limits_{s\in S} \max\{x(s), y(s)\}$ для довільних $x, y \in X$.

Зауваження 2.5. Для довільного топологічного простору X функція $f : X \to \mathbb{R}$ напівнеперервна зверху чи знизу, якщо f неперервна, як функція зі значеннями у частково метричному просторі $(\mathbb{R}, p)$ з прикладу 2.4(a) чи (b) відповідно.

3. Метрика, породжена частковою метрикою, і регулярні частково метричні простори

Нехай (X,p) — частково метричний простір. Легко бачити [7], що функція $d_p : X^2 \to \mathbb{R}$,

$$d_p(x,y) = 2p(x,y) - p(x,x) - p(y,y)$$

є метрикою на X, яку ми називатимемо *метрикою, породженою частковою метрикою p*. Тотожне відображення $\pi_p : (X,p) \to (X,d_p)$, $\pi_p(x) = x$, ми називатимемо *відображенням, асоційованим з частковою метрикою p*. Крім того, для кожного $x \in X$ і $\varepsilon > 0$ покладемо

$$B_{d_p}(x,\varepsilon) = \{y \in X : d_p(x,y) < \varepsilon\}.$$

Зауважимо, що $B_{d_p}(x,\varepsilon) \subseteq B_p(x,\varepsilon)$ для всіх $x \in X$ і $\varepsilon > 0$. Тому має місце наступний факт.

Твердження 3.1. *Відображення $\pi_p^{-1} : (X,d_p) \to (X,p)$ неперервне.*

Наступне твердження дає зв'язок неперервності асоційованого відображення π_p з неперервністю часткової метрики.

Твердження 3.2. *Для частково метричного простору (X,p) і точки $x_0 \in X$ наступні умови є рівносильними:*

(1) *часткова метрика p є неперервною в точці (x_0,x_0);*
(2) *звуження часткової метрики p на діагональ $\Delta = \{(x,x) : x \in X\}$ є неперервним в точці (x_0,x_0);*
(3) *асоційоване відображення $\pi_p : (X,p) \to (X,d_p)$ є неперервним в точці x_0.*

Доведення. Імплікація (1)⇒(2) є очевидною.

(2)⇒(3). Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ і знайдемо окіл U_1 точки x_0 в (X,p) такий, що

$$|p(x,x) - p(x_0,x_0)| < \tfrac{\varepsilon}{3}$$

для кожного $x \in U_1$. Тепер для кожного $x \in U_1 \cap B_p(x_0, \frac{\varepsilon}{3})$ маємо

$$d_p(x, x_0) = 2(p(x, x_0) - p(x_0, x_0)) + (p(x_0, x_0) - p(x, x)) < 2 \cdot \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Отже, відображення π_p неперервне в точці x_0.

(3)⇒(1). Згідно з твердженням 2.3 достатньо довести, що функція p напівнеперервна знизу в точці (x_0, x_0). Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ і виберемо окіл U точки x_0 в (X, p) такий, що $d_p(x, x_0) < \varepsilon$ для кожного $x \in U$. Тоді використовуючи умову (p_2) для довільних $x, y \in U$ одержимо

$$\begin{aligned} p(x, y) \geq p(x, x) &= (p(x, x) - p(x, x_0)) + (p(x, x_0) - p(x_0, x_0)) + p(x_0, x_0) \\ &\geq (p(x, x) - p(x, x_0)) + (p(x_0, x_0) - p(x, x_0)) + p(x_0, x_0) \\ &= -d_p(x, x_0) + p(x_0, x_0) > p(x_0, x_0) - \varepsilon. \end{aligned}$$

Твердження доведено. □

Наслідок 3.3. *Нехай (X, p) — частково метричний простір. Тоді наступні умови рівносильні:*

(1) *часткова метрика p є неперервною;*
(2) *звуження часткової метрики p на діагональ $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$ є неперервним;*
(3) *асоційоване відображення $\pi_p : (X, p) \to (X, d_p)$ є неперервним;*
(4) *топологічні простори (X, p) і (X, d_p) збігаються.*

Для топологічного простору X, функції $f : X \to \mathbb{R}$ і точки $x_0 \in X$ через $\omega_f(x_0)$ ми позначаємо коливання функції f в точці x_0. Тобто

$$\omega_f(x_0) = \inf_{U \in \mathcal{U}} \sup_{u, v \in U} |f(u) - f(v)|,$$

де $\mathcal{U}$ — система всіх околів точки x_0.

Наступна властивість для напівнеперервних функцій дійсної змінної, як функцій першого класу Бера, є добре відомою [8, Глава XV, § 3-4].

Твердження 3.4. *Нехай X — топологічний простір, $f : X \to [0, 1]$ — напівнеперервна зверху функція і $\varepsilon > 0$. Тоді існує ніде не щільна множина $A \subseteq X$ така, що $\omega_f(x) < \varepsilon$ для кожного $x \in X \setminus A$.*

Доведення. Виберемо $n \in \mathbb{N}$ таким чином, щоб $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{4} = \delta$ і для кожного $k \in \{1, \ldots, n\}$ покладемо

$$A_k = \{x \in X : \omega_f(x) \geq \varepsilon\} \cap f^{-1}\big([\tfrac{k-1}{n}, \tfrac{k}{n}]\big).$$

Достатньо показати, що всі множини A_k ніде не щільні.

Припустимо, що деяка множина A_k щільна у непорожній відкритій множині $U \subseteq X$. Зафіксуємо $x_0 \in U \cap A_k$ і виберемо відкритий окіл U_1 точки x_0 такий, що $f(x) < f(x_0) + \delta$ для кожного $x \in U_1$. Оскільки

$\omega_f(x_0) \geq 4\delta$, то існує $x_1 \in U \cap U_1$ таке, що $f(x_1) < f(x_0) - 2\delta \leq \frac{k-1}{n} - \delta$. Тоді для довільного околу U_2 точки x_1 існує $x_2 \in U_2 \cap U$ і, зокрема,

$$f(x_2) \geq \tfrac{k-1}{n} \geq f(x_1) + \delta,$$

що суперечить напівнеперервності зверху f у точці x_1. $\square$

Тепер з твердження 2.3, наслідку 3.3 і твердження 3.4 випливає наступний факт.

Наслідок 3.5. *Нехай (X, p) — частково метричний простір. Тоді існує множина A першої категорії в (X, p) така, що простори $(X \setminus A, p)$ і $(X \setminus A, d_p)$ збігаються, зокрема, $X \setminus A$ — метризовний підпростір простору X.*

4. Регулярність частково метричних просторів

Топологічний простір X називатимемо *регулярним в точці* $x_0 \in X$, якщо для довільного околу U точки x_0 в X існує замкнений окіл V точки x_0 такий, що $V \subseteq U$. Як випливає з наслідку 3.3, якщо відображення π_p неперервне, то простір (X, p) — метризовний, зокрема регулярний. Тому природно виникає питання про точковий варіант цієї властивості. Тобто чи випливає з неперервності в точці x_0 асоційованого відображення π_p регулярність частково метричного простору (X, p) в точці x_0? Разом з тим, постає питання про зворотній зв'язок. А саме, чи випливає з регулярності (в точці) простору (X, p) неперервність (в точці) відображення π_p? Наступні два приклади показують, що ці питання мають негативні відповіді.

Твердження 4.1. *Існує частково метричний простір (X, p) такий, що асоційоване відображення π_p неперервне в точці $x_0 \in X$, але (X, p) не є регулярним в точці x_0.*

Доведення. Нехай $S = \{0\} \cup \mathbb{N} \cup \mathbb{N}^2$. Побудуємо сім'ю $(x_s : s \in S)$ функцій $x_s : S \to \mathbb{R}$. Покладемо

$$x_0(s) = \begin{cases} 1, & s = 0, \\ 0, & s \in S \setminus \{0\}, \end{cases}$$

$$x_n(s) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{n}, & s = 0, \\ 1 + \frac{1}{n}, & s = n, \\ 0, & s \in S \setminus \{0, n\}, \end{cases}$$

для кожного $n \in \mathbb{N}$ і

$$x_{(n,m)}(s) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{n}, & s = 0, \\ \frac{1}{n} - \frac{1}{m}, & s = n, \\ \frac{1}{m}, & s = (n,m), \\ 0, & s \in S \setminus \{0, n, (n,m)\}, \end{cases}$$

для довільних $n, m \in \mathbb{N}$.

Тепер розглянемо простір $X = \{x_s : s \in S\}$ з частковою метрикою

$$p(x,y) = \sum_{s \in S} \max\{x(s), y(s)\},$$

тобто (X, p) є підпростором $l_1(S)$.

Зауважимо, що $p(x_0, x_0) = p(x_{n,m}, x_{n,m}) = 1$ для довільних $n, m \in \mathbb{N}$. Оскільки $p(x_0, x_n) \geq 2$ для кожного $n \in \mathbb{N}$, то

$$U_0 = B_p(x_0, \tfrac{1}{2}) \subseteq \{x_0\} \cup \{x_{n,m} : n, m \in \mathbb{N}\}.$$

Тому $p(x,x) = 1$ для кожного $x \in U_0$. Отже, звуження часткової метрики p на діагональ $\Delta = \{(x,x) : x \in X\}$ є неперервним в точці(x_0, x_0) і згідно з твердженням 3.2 звуження π_p неперервне в точці x_0.

Тепер покажемо, що $\overline{B_p(x_0, \varepsilon)} \not\subseteq U_0$ для довільного $\varepsilon > 0$.

Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ і виберемо $n \in \mathbb{N}$ так, що $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Тоді для довільного $m \geq n$ маємо

$$p(x_{n,m}, x_0) = 1 + \tfrac{1}{m} + \tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{m} = 1 + \tfrac{1}{n} < p(x_0, x_0) + \varepsilon.$$

Тому $x_{n,m} \in B_p(x_0, \varepsilon)$.

Нехай $U = B_p(x_n, \delta)$, де $\delta > 0$, — довільний базисний окіл точки x_n. Зауважимо, що

$$p(x_{n,m}, x_n) = 1 - \tfrac{1}{n} + 1 + \tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{m} = 2 + \tfrac{1}{m} = p(x_n, x_n) + \tfrac{1}{m}.$$

Тому $x_{n,m} \in U$ при $m \geq \frac{1}{\delta}$.

Отже, $U \cap B_p(x_0, \varepsilon) \neq \emptyset$ і $x_n \in \overline{B_p(x_0, \varepsilon)} \setminus U_0$. $\square$

Теорема 4.2. *Існує метризовний частково метричний простір (X, p) такий, що асоційоване відображення π_p є розривним у кожній точці $x \in X$.*

Доведення. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ через S_n ми позначимо множину всіх наборів $(k_1, k_2, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}^n$ таких, що $k_1 \leq k_2 \leq \cdots \leq k_n$. Крім того, для довільних $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$ з $m \geq n$ і $(k_1, k_2, \ldots, k_m) \in S_m$ покладемо $s|_n = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$. Зрозуміло, що при цьому $s|_n \in S_n$.

Покладемо $\alpha_0 = 1$. Індукцією відносно n легко побудувати послідовність сімей $(\alpha_s : s \in S_n)$ чисел $\alpha_s \in (0,1)$, яка задовольняє такі умови:

(a) послідовність $(\alpha_k)_{k=1}^{\infty}$ строго зростає і $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_k < 1$;

(b) для всіх $n \in \mathbb{N}$ і $(k_1, \dots, k_n) \in S_n$ послідовність $(\alpha_{(k_1,\dots,k_n,k_n+k)})_{k=0}^{\infty}$ строго зростає і $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_{(k_1,\dots,k_n,k_n+k)} < \alpha_{(k_1,\dots,k_n)}$;

(c) $\alpha_{(k_1,\dots,k_n,k_n)} > \alpha_{(k_1,\dots,k_n-1)}$ для всіх $n \in \mathbb{N}$ і $(k_1, \dots, k_n) \in S_n$ таких, що $(k_1, \dots, k_n - 1) \in S_n$.

Позначимо $S_0 = \{0\}$, $S = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} S_n$. і побудуємо сім'ю $(x_s : s \in S)$ функцій $x_s : S \to \mathbb{R}$. Покладемо

$$x_0(s) = \begin{cases} 1, & s = 0, \\ 0, & s \in S \setminus \{0\}, \end{cases}$$

$$x_{(k_1,\dots,k_n)}(s) = \begin{cases} \alpha_{(k_1,\dots,k_n)} - \frac{1}{k_1}, & s = 0, \\ \frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2}, & s = k_1, \\ \frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_3}, & s = (k_1, k_2), \\ \dots & \\ \frac{1}{k_{n-1}} - \frac{1}{k_n}, & s = (k_1, k_2, \dots, k_{n-1}), \\ \frac{1}{k_n}, & s = (k_1, k_2, \dots, k_n), \\ 0, & s \in S \setminus \{0, k_1, (k_1, k_2), \dots, (k_1, \dots, k_n)\}, \end{cases}$$

для довільних $n \in \mathbb{N}$ і $(k_1, \dots, k_n) \in S_n$.

Тепер, як і в доведенні попереднього твердження, розглянемо простір $X = \{x_s : s \in S\}$ з частковою метрикою

$$p(x, y) = \sum_{s \in S} \max\{x(s), y(s)\}.$$

Зауважимо, що $p(x_0, x_0) = 1$ і $p(x_s, x_s) = \alpha_s$ для довільних $n \in \mathbb{N}$ і $s \in S_n$.

Зафіксуємо $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ і $s = (k_1, k_2, \dots, k_n) \in S_n$. Для кожного $m \in \mathbb{N}$ покладемо $t_m = (k_1, k_2, \dots, k_n, k_n + m)$.

Легко бачити, що $x_{t_m} \to x_s$ в X. Але згідно з умовами (a) та (b) маємо

$$\lim_{m\to\infty} p(x_{t_m}, x_{t_m}) = \lim_{m\to\infty} \alpha_{t_m} < \alpha_s = p(x, x).$$

Тому згідно з твердженням 3.2 відображення π_p не є неперервним в точці x.

Залишилось перевірити, що X — метризовний. Оскільки простір X зліченний з першою аксіомою зліченності, то згідно з [4, Теорема 4.2.9] достатньо показати, що X регулярний.

Спочатку перевіримо регулярність простору X в точці x_0. Зауважимо, що
$$p(x_0, x_s) = 1 + \tfrac{1}{k_1} = p(x_0, x_0) + \tfrac{1}{k_1}$$
для довільних $n \in \mathbb{N}$ і $s = (k_1, k_2, \dots, k_n) \in S_n$. Зафіксуємо $m \in \mathbb{N}$ і розглянемо окіл
$$U = B_p(x_0, \tfrac{1}{m}) = \{x_0\} \cup \{x_{(k_1,\dots,k_n)} : k_1 > m\}$$
точки x_0.

Нехай $x = x_{(k_1,\dots,k_n)} \in X \setminus U$. Тоді $k_1 \le m$ і $\alpha_{(k_1,\dots,k_n)} \le \alpha_{k_1} \le \alpha_m$ згідно з умовою (b). Розглянемо окіл $V = B_p(x, \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1})$ точки x. Для довільного $y \in V$ маємо
$$y(0) < x(0) + \tfrac{1}{m} - \tfrac{1}{m+1} = \alpha_{(k_1,\dots,k_n)} - \tfrac{1}{k_1} + \tfrac{1}{m} - \tfrac{1}{m+1} \le \alpha_m - \tfrac{1}{m+1}.$$
З іншого боку, для довільного $z = x_{(l_1,\dots,l_i)} \in U$ маємо $l_1 \ge m+1$ і $\alpha_{(l_1,\dots,l_i)} > \alpha_m$ згідно з (c). Тому
$$z(0) = \alpha_{(l_1,\dots,l_i)} - \tfrac{1}{l_1} > \alpha_m - \tfrac{1}{m+1}.$$
Отже, $V \cap U = \emptyset$ і множина U — відкрито-замкнена. Таким чином, простір X регулярний в точці x_0. Крім того, для кожного $k \in \mathbb{N}$ множина
$$G_k = \{x \in X : x = x_{(k,k_2,\dots,k_n)}\} = \{x_s \in X \setminus \{x_0\} \ : \ s|_1 = k\}$$
відкрито-замкнена, як різниця відкрито-замкнених множин.

Покажемо регулярність простору X в кожній точці $x \in \{x_s : s \in S_1\}$. Зафіксуємо $k \in S_1$. Зауважимо, що
$$p(x_k, x_s) = \alpha_k + \tfrac{1}{k_2} = p(x_k, x_k) + \tfrac{1}{k_2}$$
для кожного $x_s \in G_k \setminus \{x_k\}$, де $s = (k, k_2, \dots, k_n) \in S_n$ і $n \ge 2$. Зафіксуємо $m \ge k$ і розглянемо окіл
$$U = G_k \cap B_p(x_k, \tfrac{1}{m}) = \{x_k\} \cup \{x_{(k,k_2,\dots,k_n)} : k_2 > m\}$$
точки x_k.

Нехай $x = x_{(k,k_2,\dots,k_n)} \in G_k \setminus U$. Тоді $k \le k_2 \le m$ і
$$\alpha_{(k,k_2,\dots,k_n)} \le \alpha_{(k,k_2)} \le \alpha_{(k,m)}$$
згідно з умовою (b). Розглянемо окіл $V = G_k \cap B_p(x, \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1})$ точки x. Для довільного $y \in V$ маємо
$$\begin{aligned} y(0) + y(k) &< x(0) + x(k) + \tfrac{1}{m} - \tfrac{1}{m+1} \\ &= \alpha_{(k,k_2,\dots,k_n)} - \tfrac{1}{k_2} + \tfrac{1}{m} - \tfrac{1}{m+1} \\ &\le \alpha_{(k,m)} - \tfrac{1}{m} + \tfrac{1}{m} - \tfrac{1}{m+1} \\ &= \alpha_{(k,m)} - \tfrac{1}{m+1}. \end{aligned}$$

З іншого боку, для довільного $z = x_{(k,l_2,\dots,l_i)} \in U$ маємо $l_2 \geq m+1$ і $\alpha_{(k,l_2,\dots,l_i)} > \alpha_{(k,m)}$ згідно з (c). Тому

$$z(0) + z(k) = \alpha_{(k,l_2,\dots,l_i)} - \tfrac{1}{l_2} > \alpha_{(k,m)} - \tfrac{1}{m+1}.$$

Отже, $V \cap U = \emptyset$ і множина U — відкрито-замкнена. Таким чином, простір X регулярний в точці x_k. Зауважимо, що, крім того, для кожного $s \in S_2$ множина

$$G_s = \{x_t \in X : t|_2 = s\}$$

відкрито-замкнена, як різниця відкрито-замкнених множин. Тепер для кожного $n \geq 3$ і $s \in S_n$ покладемо

$$G_s = \{x_t \in X : t|_n = s\}.$$

Далі, використовуючи індукцію відносно n нескладно можна довести регулярність простору X в кожній точці $x \in \{x_s : s \in S_n\}$ і відкрито-замкненість кожної множини G_s, де $s \in S_n$. При цьому індуктивний перехід доводиться повністю аналогічно, як у випадку $n = 2$. □

5. Відображення зі значеннями у частково метричних просторах

Для топологічних просторів X і Y через $C(f)$ ми позначатимемо множину точок неперервності відображення $f : X \to Y$, а через $D(f)$ ми позначатимемо множину точок розриву відображення f. Добре відомо, що множина точок неперервності відображення зі значеннями у метризовному просторі має тип G_δ, а множина точок розриву має тип F_σ. Наступний результат є певним аналогом цього факту для відображень зі значеннями у частково метричному просторі.

Теорема 5.1. *Нехай X — топологічний простір, (Y, p) — частково метричний простір і $f : X \to Y$ такі, що для довільної ніде не щільної множини $B \subseteq Y$ множина $f^{-1}(B)$ ніде не щільна в X. Тоді існують G_δ-множина C в X і множина A першої категорії в X такі, що $C(f) = C \cup A$.*

Доведення. Зафіксуємо $n \in \mathbb{N}$ і позначимо через B_n множину всіх точок $y \in Y$ таких, що $p(y, y) \leq n$ і коливання звуження часткової метрики p на діагональ $\Delta = \{(y, y) : y \in Y\}$ у точці (y, y) не менше, ніж $\frac{1}{n}$. Застосуємо твердження 3.4 до функції $\varphi_n : Y \to [-(n+1), n+1]$,

$$\varphi_n(y) = \begin{cases} -(n+1), & p(y,y) < -(n+1), \\ n+1, & p(y,y) > n+1, \\ p(y,y), & |p(y,y)| \leq n+1, \end{cases}$$

і одержимо, що множина B_n ніде не щільна в Y. Тому множина

$$A_n = f^{-1}(\overline{B_n})$$

також ніде не щільна в X. Далі покладемо $G_n = X \setminus \overline{A_n}$ і розглянемо відображення $f_n : G_n \to (Y, d_p)$. Позначимо через C_n множину всіх точок $x \in G_n$ таких, що $\omega_{f_n}(x) < \frac{1}{n}$.

Тепер покладемо $C = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} C_n$ і $A = C(f) \bigcap \left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \overline{A_n} \right)$. Оскільки всі множини G_n відкриті, то відображення $g : X \to (Y, d_p)$, $g(x) = f(x)$, неперервне в кожній точці множини C. Тому і відображення f неперервне в кожній точці множини C. Залишилось показати, що f розривне в кожній точці

$$x_0 \in \left(X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n} \right) \setminus C = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \right) \setminus C.$$

Зауважимо, що g розривне в точці x_0 і $y_0 = f(x_0) \in Y \setminus \left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n \right)$. Тому звуження часткової метрики на Δ є неперервним в точці (y_0, y_0) і згідно з твердженням 3.2 асоційоване з p відображення π_p неперервне в точці y_0. Отже, відображення f розривне в точці x_0. □

Наступний приклад вказує на істотність додаткових умов на відображення f у теоремі 5.1.

Твердження 5.2. *Існує регулярний частково метричний простір (Y, p) і відображення $f : [0,1] \to Y$ такі, що множина $C(f)$ невимірна за Борелем.*

Доведення. Нехай $A \subseteq [0,1]$ — невимірна за Лебеґом множина така, що множини A і $B = [0,1] \setminus A$ щільні в $[0,1]$. Для кожного $a \in A$ розглянемо функцію $y_a : [0,2] \to \mathbb{R}$,

$$y_a(t) = \begin{cases} 2, & t \in [a, a+1], \\ 0, & t \in [0,2] \setminus [a, a+1], \end{cases}$$

а для кожного $b \in B$ розглянемо функцію $y_b : [0,2] \to \mathbb{R}$,

$$y_b(t) = \begin{cases} 1, & t \in [b, b+1], \\ 0, & t \in [0,2] \setminus [b, b+1]. \end{cases}$$

Покладемо $Y = \{y_x : x \in [0,1]\}$ і розглянемо простір Y з частковою метрикою

$$p(y,z) = \int_0^2 \max\{y(t), z(t)\} d\mu(t).$$

Зауважимо, що

$$p(y_u, y_v) - p(y_u, y_u) \geq |u - v|$$

для довільних $u, v \in [0,1]$. Тому простір (Y, p) регулярний.

Розглянемо відображення $f : [0,1] \to Y$, $f(x) = y_x$. Безпосередньою перевіркою легко переконатися, що $C(f) = A$. $\square$

Відображення $f : X \to Y$ між топологічними просторами X і Y називається F_σ*-вимірною*, якщо для кожної відкритої в X множини G множина $f^{-1}(G)$ має тип F_σ в X.

Наступний результат узагальнює теорему про F_σ-вимірність напівнеперервної функції (дивись [8, Глава XV, § 3-4]).

Теорема 5.3. *Припустимо, що X — досконало нормальний простір, (Y, p) — частково метричний простір, такий що (Y, d_p) сепарабельний, і $f : X \to (Y, p)$ — неперервне відображення. Тоді відображення $g : X \to (Y, d_p)$, $g(x) = f(x)$, є F_σ-вимірним.*

Доведення. Для довільних $y_0 \in Y$ і $\varepsilon > 0$ покладемо

$$G(y_0, \varepsilon) = B_p(y_0, \varepsilon) \setminus \{y \in Y : p(y, y) < p(y_0, y_0) + \varepsilon\}.$$

Зауважимо, що

$$B_{d_p}(y_0, \varepsilon) \subseteq G(y_0, \varepsilon) \subseteq B_{d_p}(y_0, 3\varepsilon).$$

Тому довільну відкриту множину G в просторі (Y, d_p) можна подати у вигляді об'єднання множин $G(y, \varepsilon)$. Причому, оскільки простір (Y, d_p) сепарабельний, то множину G можна подати у вигляді

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G(y_n, \varepsilon_n).$$

Залишилось зауважити, що кожна множина $f^{-1}(G(y_n, \varepsilon_n))$ має тип F_σ, як прообраз при неперервному відображенні різниці двох відкритих множин. $\square$

Література

[1] I. Altun, H. P. Masiha, F. Sabetghadam. Fixed point theorems for integral type contractions on partial metric spaces. *Ukr. Mat. Zhurn.*, 68(6):826–834, 2016.

[2] I. Altun, F. Sola, H. Simsek. Generalized contractions on partial metric spaces. *Topology and its Applications*, 157(18):2778–2785, 2010.

[3] L. Ciric, B. Samet, H. Aydi, Vetro C. Common fixed points of generalized contractions on partial metricc spaces and an application. *Appl. Math. Comput.*, 218:2398–2406, 2011.
[4] R. Engelking. *General Topology.* Heldermann Verlag, Berlin, 1989.
[5] E. Karapinar, I. M. Erhan. Fixed point theorems for operators on partial metricc spaces. *Appl. Math. Lett.*, 24:1894–1899, 2011.
[6] S. G. Matthews. Partial metric space. *8th British Colloquium for Theoretical Computer Science, March 1992. In Research Report 212, Dept. of Computer Science, University of Warwick*, 1992.
[7] S. G. Matthews. Partial metric topology. *Proc. 8th Summer Conference on General Topology and Applications, Ann. New York Acad. Sci.*, 728:183–197, 1994.
[8] I. P. Natanson. *Theory of Functions of a real variable.* Dover Books on Mathematics. Dover Publications, 2016.
[9] S. Romaguera. A kirk type characterization of completeness for partial metric spaces. *Fixed Points Theory Appl.*, page 10 p., 2010.
[10] J. E. Stoy. Denotational semantics: the Scott-Strachey approach to programming language theory. *MIT Press. Cambridge Massachusetts*, 1977.

Надійшла до редакції 16 листопада 2016, прийнята до друку 12 січня 2017.

Мироник Вадим Ілліч
58012, кафедра алгебри та інформатики, Чернівецький національний університет, вул. Коцюбинського 2, м. Чернівці, Україна
Email: `vadmyron@gmail.com`

Михайлюк Володимир Васильович
58012, кафедра математичного аналізу, Чернівецький національний університет, вул. Коцюбинського 2, м. Чернівці, Україна
Email: `vmykhaylyuk@ukr.net`

Proceedings of the
International Geometry Center
Vol. 9, no. 3-4 (2016) pp. 50–58

Задача о тени и смежные задачи

Ю. Б. Зелинский, И. Ю. Выговская, Х. К. Дакхил

Abstract. We review recent results related to the shade problem, discuss unsolved problems, and give estimates of necessary and sufficient conditions for solutions of shade problem.

Аннотация. В работе дан обзор результатов, связанных с проблемой тени, полученных в исследованиях за последние полтора года. Обсуждаются нерешенные задачи и даны оценки необходимых и достаточных условий.

1. Введение

Аксиоматический подход к определению выпуклости (говорят, что семейство множеств состоит из выпуклых множеств, если пересечение произвольного их количества принадлежит этому же семейству, [12]) позволяет назвать выпуклыми ряд экзотических классов множеств, которые не ассоциируются с привычным понятием выпуклости, например, множество всех множеств или семейство всех замкнутых подмножеств некоторого топологического пространства.

Традиционно, подмножество евклидова пространства называется *выпуклым*, если вместе с произвольной парой точек оно содержит и отрезок, соединяющий эти точки. Это эквивалентно связности пересечений подмножества с произвольной вещественной прямой.

Вопросы анализа часто приводят к другим семействам множеств, которые удовлетворяют аксиоме выпуклости. Ниже мы рассмотрим ряд задач, решение которых требует привлечения различных обобщений понятия выпуклости.

Ключевые слова: Евклидово пространство, сфера, шар, выпуклость, обобщенная выпуклость

УДК 513.83, 517.5

2. Обобщенная выпуклость и задача о тени

Определение 2.1. Скажем, что множество $E \subset \mathbb{R}^n$ *m-выпукло относительно точки* $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$, если найдется m-мерная плоскость L, такая что $x \in L$ и $L \cap E = \varnothing$.

Определение 2.2. Скажем, что множество $E \subset \mathbb{R}^n$ *m-выпукло*, если оно m-выпукло относительно каждой точки $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$.

Оба приведенные определения удовлетворяют известной аксиоме выпуклости: пересечение каждого подсемейства таких множеств тоже удовлетворяет определению. Для произвольного множества $E \subset \mathbb{R}^n$ мы можем рассматривать минимальное m-выпуклое множество, содержащее E, и назвать его *m-оболочкой* множества E.

В работе [10] получено полное решение следующей задачи о тени, впервые рассмотренной Г. Худайбергановым [14], [7], [8].

Задача о тени. Какое минимальное число попарно непересекающихся замкнутых шаров с центрами на сфере S^{n-1} в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ и радиуса меньшего от радиуса сферы достаточно чтобы любая прямая, проходящая через центр сферы, пересекала хотя бы один из этих шаров?

Другими словами: когда центр сферы будет принадлежать 1-выпуклой оболочке объединения шаров?

В [10] показано, что для этого необходимо и достаточно $n+1$ шара.

3. Смежные задачи

Решение задачи о тени индуцировало ряд близких задач, решением которых в последние полтора года занималась группа математиков в Институте математики НАН Украины. Перечислим эти задачи.

(1) Как изменится минимальное количество шаров, если центры этих шаров не привязаны к сфере?

(2) Как изменится результат задачи (1), если вместо шара рассмотреть семейство выпуклых множеств, полученных из некоторого выпуклого множества с непустой внутренностью при помощи заданной группы преобразований?

(3) Какое минимальное число попарно непересекающихся замкнутых шаров с центрами на сфере S^{n-1} и радиуса меньшего от радиуса сферы достаточно чтобы любой луч, проходящий через центр сферы, пересекал хотя бы один из этих шаров?

(4) Рассмотреть аналогичные задачи в комплексном и гиперкомплексном евклидовом пространстве.

(5) Задача о тени не только для центра сферы, а для всех точек шара, ограниченного сферой S^{n-1}, которые не принадлежат объединению выбранных шаров.
(6) Задача о тени для точек сферы S^{n-1}, которые не принадлежат объединению выбранных шаров, относительно прямых касательных к сфере.
(7) Задача о тени для шаров равного радиуса.
(8) Исследовать задачу при изменении группы преобразований.
(9) Задача о тени для семейств выпуклых множеств, которые могут пересекаться между собой.

4. Основные результаты

Рассмотрим состояние полученных ответов на перечисленные задачи. Следующий результат дает полный ответ на задачу (1).

Теорема 4.1. [9] *Для того чтобы выбранная точка в n-мерном евклидовом пространстве при $n \geq 2$ принадлежала 1-выпуклой оболочке семейства попарно непересекающихся открытых (замкнутых) шаров, которые данную точку не содержат, необходимо и достаточно n шаров.*

Задача о тени при $n = 3$, когда центры шаров расположены на эллипсоиде вращения, рассмотрена в [13]. Показано, что если отношение большей оси эллипса к меньшей больше или равно $2\sqrt{2}$, то для создания тени достаточно трех шаров.

Полный ответ на задачу (2) содержится в следующем результате.

Теорема 4.2. [9] *Для того чтобы выбранная точка в n-мерном евклидовом пространстве при $n \geq 2$ принадлежала 1-оболочке семейства попарно непересекающихся замкнутых множеств, полученного из заданного выпуклого множества с непустой внутренностью при помощи группы преобразований, состоящей из движений и гомотетий, необходимо и достаточно n элементов семейства.*

Если группу преобразований уменьшить, то количество элементов семейства, необходимых для создания тени в центре сферы может увеличиться. Однако, в [11] показано, что результат не изменится, если из группы движений исключить повороты.

Определение 4.3. Скажем, что множество $E \subset \mathbb{R}^n$ *m-полувыпукло относительно точки $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$*, если найдется m-мерная полуплоскость P, такая что $x \in P$ и $P \cap E = \varnothing$.

Определение 4.4. Скажем, что множество $E \subset \mathbb{R}^n$ *m-полувыпукло*, если оно m-полувыпукло относительно каждой точки $x \in \mathbb{R}^n \backslash E$.

Легко убедиться, что и эти определения удовлетворяют аксиоме выпуклости, и мы тоже можем строить m-полувыпуклые оболочки множеств согласно этим определениям.

Для задачи (3) получена оценка сверху в размерности три. Задача точной оценки остается открытой, неизвестны даже оценки сверху в размерностях больше трех.

Теорема 4.5. [4] *Для того чтобы центр двумерной сферы в трехмерном евклидовом пространстве принадлежал 1-полувыпуклой оболочке семейства открытых (соотв. замкнутых) шаров радиуса не превышающего (соотв. меньшего) радиуса сферы и с центрами на сфере достаточно десяти шаров.*

Если объединить вопросы задач (1) и (3), то получен точный результат.

Теорема 4.6. [9] *Для того чтобы выбранная точка в n-мерном евклидовом пространстве при $n \geq 2$ принадлежала 1-полувыпуклой оболочке семейства попарно непересекающихся открытых (замкнутых) шаров, которые данную точку не содержат, необходимо и достаточно $n + 1$ шара.*

Следующий результат показывает, что в предыдущей теореме можно заменить шары выпуклыми телами с непустой внутренностью.

Теорема 4.7. [9] *Для того чтобы выбранная точка в n-мерном евклидовом пространстве при $n \geq 2$ принадлежала 1-полувыпуклой оболочке семейства попарно непересекающихся замкнутых множеств, полученного из заданного выпуклого множества с непустой внутренностью при помощи группы преобразований, состоящей из движений и гомотетий, необходимо и достаточно $n + 1$ элемента семейства.*

Но, если уменьшать группу допустимых преобразований, то количество необходимых для создания тени множеств увеличивается. Критическим модельным множеством будет прямоугольный параллелепипед.

Частичный ответ на задачу (8) дает следующий результат.

Теорема 4.8. [11] *Для того чтобы выбранная точка в n-мерном евклидовом пространстве при $n \geq 2$ принадлежала 1-полувыпуклой оболочке семейства попарно непересекающихся замкнутых множеств,* *полученного из заданного выпуклого множества с непустой внутренностью при помощи группы преобразований, состоящей из параллельных переносов и гомотетий, необходимо и достаточно $2n$ элементов семейства.*

В случае комплексного или гиперкомплексного евклидового пространства можно рассмотреть аналогичные задачи относительно пересечений семейств, соответственно, комплексными или гиперкомплексными плоскостями.

Определение 4.9. Скажем, что множество $E \subset \mathbb{C}^n$ (соотв. $E \subset \mathbb{H}^n$) m-комплексно (соотв. m-гиперкомплексно) выпукло относительно точки $z \in \mathbb{C}^n \setminus E$ (соотв. $z \in \mathbb{H}^n \setminus E$), если найдется m-мерная комплексная (гиперкомплексная) плоскость L, такая что $z \in L$ и $L \cap E = \varnothing$. Скажем, что множество $E \subset \mathbb{C}^n$ (соотв. $E \subset \mathbb{H}^n$) m-комплексно (соотв. m-гиперкомплексно) выпукло, если оно m-комплексно (соотв. m-гиперкомплексно) выпукло относительно каждой точки $z \in \mathbb{C}^n \setminus E$ (соотв. $E \subset \mathbb{H}^n$).

Для задачи (4) с шарами, центры которых находятся на сфере, получена точная оценка при $n = 2$ и оценка сверху при $n > 2$.

Теорема 4.10. [4] *Для того чтобы начало координат в двумерном комплексном (соотв. гиперкомплексном) евклидовом пространстве $\mathbb{C}^2$ (соотв. $\mathbb{H}^2$) принадлежало 1-комплексной (соотв. 1-гиперкомплексной) оболочке семейства попарно непересекающихся открытых (соотв. замкнутых) шаров с центрами на единичной сфере S^3 (соотв. S^7), которые начало координат не содержат, необходимо и достаточно двух шаров.*

Теорема 4.11. [5] *Для того чтобы начало координат в n-мерном комплексном (соотв. гиперкомплексном) евклидовом пространстве $\mathbb{C}^n$ (соотв. $\mathbb{H}^n$), $n > 2$ принадлежало 1-комплексной (соотв. 1-гиперкомплексной) оболочке семейства попарно непересекающихся открытых (соотв. замкнутых) шаров с центрами на единичной сфере $S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$ (соотв. $S^{4n-1} \subset \mathbb{H}^n$), и которые начало координат не содержат, достаточно $2n$ (соотв. $4n - 1$) шаров.*

Также в (гипер)комплексном случае получаем полный аналог теоремы 4.1, если центры шаров не привязаны к сфере.

Теорема 4.12. [6] *Для того чтобы начало координат в n-мерном комплексном (соотв. гиперкомплексном) евклидовом пространстве $\mathbb{C}^n$*

(соотв. $\mathbb{H}^n$), $n > 2$ принадлежало 1-комплексной (соотв. 1-гиперкомплексной) оболочке семейства попарно непересекающихся открытых (соотв. замкнутых) шаров, которые начало координат не содержат, достаточно n шаров.

Задача (5) весьма сложная. Здесь кроме почти очевидного факта, что при $n = 2$ достаточно трех шаров размещенных в вершинах равностороннего треугольника, радиус которых равен половине высоты треугольника, больше ничего неизвестно.

Определение 4.13. Скажем, что семейство множеств $\mathfrak{J} = \{F_\alpha\}$ задает тень касательную к многообразию M в точке $x \in M$, если каждая прямая, касательная к многообразию M в точке $x \in M \setminus \bigcup\limits_\alpha F_\alpha$, имеет непустое пересечение хотя бы с одним множеством F_α, принадлежащим к семейству $\mathfrak{J}$.

Задачу (6) при $n = 3$ можно сформулировать следующим образом. Найти минимальное количество попарно непересекающихся шаров с центрами на сфере $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, которые обеспечат тень касательную к сфере S^2 во всех точках $x \in S^2 \setminus \bigcup\limits_\alpha F_\alpha$.

Лемма 4.14. *Рассмотрим равносторонний треугольник ABC в евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$. Если мы выберем три круга B_i, $i = 1, 2, 3$ с центрами в вершинах этого треугольника и радиуса равного половине высоты треугольника, то каждая прямая через произвольную точку $x \in (\bigcup\limits_{i=1}^{3} B_i)^* \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{3} B_i$, где $(\bigcup\limits_{i=1}^{3} B_i)^*$ — выпуклая оболочка множества $\bigcup\limits_{i=1}^{3} B_i$, пересекается не менее чем с одним из выбранных кругов.*

Отметим, что окружность, описанная вокруг этого треугольника, лежит в выпуклой оболочке этих трех шаров. Лемма решает задачу (4) при $n = 2$. Этот результат показывает, что в трехмерном случае также для произвольной точки сферы можно выбрать три попарно касающиеся шара, которые обеспечат тень во всех точках криволинейного треугольника, вырезанного на сфере этими шарами. Однако, как показывает следующий пример, согласование такой конструкции для всей сферы требует дополнительных рассуждений.

Пример 1. Существует набор из 14 открытых (замкнутых) попарно непересекающихся шаров с центрами на сфере $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, который не обеспечивает тень касательную к сфере S^2 в каждой точке $x \in S^2 \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{14} F_i$.

Не нарушая общности можно предполагать, что выбрана сфера S^2 с центром в начале координат радиуса единица. Впишем в эту сферу куб с вершинами в точках $(x = \pm 1/\sqrt{3},\ y = \pm 1/\sqrt{3},\ z = \pm 1/\sqrt{3})$. Длина ребра куба равна $a = 2/\sqrt{3}$. Теперь выберем восемь открытых шаров с центрами в вершинах куба и радиуса равного половине ребра куба $r = 1/\sqrt{3} \approx 0.577$. Добавим к этому семейству шесть новых открытых шара с центрами в точках пересечения лучей, выходящих из начала координат и проходящих через центр грани куба, со сферой S^2. Радиусы этих шаров равны

$$r_1 = \sqrt{2 - 2/\sqrt{3}} - 1/\sqrt{3}.$$

Каждый из них касается ровно четырех ранее выбранных шаров. Выберем двумерную плоскость, заданную уравнением $z = 0$, проходящую через экваториальную окружность сферы, которая проходит через четыре центра

$$(1, 0, 0), \qquad (0, 1, 0), \qquad (-1, 0, 0), \qquad (0, -1, 0)$$

шаров меньшего радиуса $r_1 \approx 0.342$. Поскольку $1 < \sqrt{2}/2 + r_1 \approx 1,049$, то прямая линия, касательная к экваториальной окружности в точке $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$, пересекает шары меньшего радиуса.

Для плоскости $x + y = 2\sqrt{2}$, касательной к сфере в точке $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$, в пересечении с системой шаров получаем две пары окружностей, каждая пара из которых симметрична относительно точки $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$, а их центры находятся на паре перпендикулярных прямых.

Радиусы этих окружностей легко вычисляются. Имеем две окружности радиуса $r_2 \approx 0.547$. Их центры удалены от точки пересечения прямых на расстояние $l_2 \approx 0.577$. Другая пара окружностей радиуса $r_3 \approx 0.1766$ имеет центры, удаленные от точки пересечения прямых на расстояние $l_3 \approx 0.707$. Подсчитывая синусы углов, под которыми их полуокружности видны из точки $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$ (совпадающей с точкой пересечения прямых), получим значения 0.948 и 0.249, соответственно. Им соответствуют дуги в меньше чем 71.5° и 14.5° в градусном измерении. Поскольку их сумма меньше 90°, приходим к заключению, что существует прямая в касательной плоскости, проходящая через точку $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$, которая не пересекает ни одну из выделенных окружностей.

Сохраним центры семейства шаров, а радиусы шаров выберем равными половине расстояния от вершин куба к центрам меньших шаров $r \approx 0.4597$. Аналогично предыдущим рассуждениям в сечении с плоскостью $x + y = 2\sqrt{2}$ получим две пары окружностей радиусов $r_4 \approx 0.4215$ и $r_5 \approx 0.354$, соответственно. Подсчитывая синусы углов, под которыми их полуокружности видны из точки $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$, получим значения 0.731 и 0, 5. Им соответствуют дуги в меньше чем 47° и 30°. Поскольку их сумма также меньше 90°, приходим к заключению, что существует прямая в касательной плоскости, проходящая через точку $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$, которая не пересекает ни одну из выделенных окружностей. Кстати, во втором случае зазор между шарами увеличивается.

Построенный набор дает оценку снизу необходимого количества шаров. Оценка сверху остается открытой.

В следующем примере рассмотрим попытку решить задачу о тени и задачу (3) для шаров равного радиуса.

Пример 2. Впишем в сферу правильный икосаэдр. Предположим, что сфера S^2 единичного радиуса. Тогда, [2], длина ребра икосаэдра равна

$$a = 2\sqrt{2/(5+\sqrt{5})}.$$

Выберем 12 шаров радиуса $r = a/2$ в вершинах икосаэдра. Предположим, что этот набор шаров решает задачу. Как показано в [10], каждый такой шар задает конус прямых из центра сферы, который вырезает на сфере окружность радиуса $a/2 \approx 0.52573$. Если в сферу вписать правильный додекаэдр, то длина ребра додекаэдра равна $a_1 = 4/\left[\sqrt{3}\sqrt{1+\sqrt{5}}\right] \approx 0.7136$, [1]. Радиус окружности описанной вокруг правильного пятиугольника (грани додекаэдра) найдем из формулы $t = R\sqrt{(5-\sqrt{5})/2}$, где t — длина ребра додекаэдра [3]. Следовательно,

$$R = \frac{4\sqrt{2/3}}{\sqrt{1+\sqrt{5}} \cdot \sqrt{5-\sqrt{5}}} \approx 0.607.$$

Поскольку этот радиус больше $a/2$, то выбранных 12 шаров недостаточно для создания тени относительно луча из центра сферы.

О задачах (6) и (7) результатов почти нет. Интересны любые оценки.

Несложно показать, что задача (9) эквивалентна задаче (1) для 1-выпуклости и задаче (3) для 1-полувыпуклости.

Литература

[1] http://ru.wikipedia.org/wiki/Додекаэдр.

[2] http://ru.wikipedia.org/wiki/Икосаэдр.

[3] http://ru.wikipedia.org/wiki/Правильный_пятиугольник.

[4] Y. B. Zelinskii. Generalized convex envelopes of sets and the problem of shadow. *Journal of Mathematical Sciences*, 211(5):710–717, 2015.

[5] Y. B. Zelinskii. Problem of shadow (complex case). *Advances in Mathematics: Scientific Journal*, 5(1):1–5, 2016.

[6] Y. B. Zelinskii. The problem of the shadows. *Bulletin de la societé des sci. et letters de Lódź*, 66(1):37–42, 2016.

[7] Ю. Б. Зелинский. *Многозначные отображения в анализе.* Киев: Наукова думка, 1993.

[8] Ю. Б. Зелинский. *Выпуклость. Избранные главы*, volume 92. Праці Інституту математики НАН України, 2012.

[9] Ю. Б. Зелинский. Задача о тени для семейства множеств. *Збірник праць Інституту математики НАН України*, 12(4):197–204, 2015.

[10] Ю. Б. Зелинський, Выговская И. Ю., М. В. Стефанчук. Обобщённо выпуклые множества и задача о тени. *Український математичний журнал*, 67(12):1659–1666, 2015.

[11] Ю. Б. Зелінський, М. В. Стефанчук. Узагальнення задачі про тінь. *Український математичний журнал*, 68(6):657–662, 2016.

[12] В. П. Солтан. *Введение в аксиоматическую теорию выпуклости.* Кишинев: Штиинца, 1984.

[13] М. В. Ткачук, Т. М. Осипчук. Задача о тени для эллипсоида вращения. *Збірник праць Інституту математики НАН України*, 12(3):243–250, 2015.

[14] Г. Худайберганов. Об однородно-полиномиально выпуклой оболочке объединения шаров. *Рукопись деп. в ВИНИТИ 21.02.1982 г. № 1772 - 85 Деп.*

Поступила в редакцию 18 июля 2016, принята к печати 15 сентября 2016.

Зелинский Юрий Борисович
Институт математики НАН Украины, Киев, Украина
Email: zel@imath.kiev.ua

Выговская Ирина Юрьевна
Институт математики НАН Украины, Киев, Украина
Email: vkirinata@gmail.com

Дакхил Хайджаа Кхудхаир
КГУ им. Т. Шевченка, Киев, Украина
Email: moonm5385@gmail.com

International scientific conference
«Algebraic and geometric methods of analysis»
May 31 - June 5, 2017, Odesa, Ukraine

Dear Colleagues,

We are pleased to invite you to attend the conference «Algebraic and geometric methods of analysis» that will take place in Odesa city, Ukraine, from 31 May till 5 June 2017.

The conference continues the traditional annual conference «Geometry in Odesa» holding from 2004.

The purpose of this conference is to bring together researchers in geometry, topology, algebra, analysis and dynamical systems and to provide for them a forum to present their recent work to colleagues from different nationalities. This way we aim to stimulate discussion about the latest findings in geometrical and topological methods in analysis and to increase international collaboration.

The conference will cover the following topics:

- Algebraic methods in geometry
- Differential geometry in the large
- Geometry and topology of differentiable manifolds
- General and algebraic topology
- Dynamical systems and their applications
- Geometric problems in mathematical analysis
- Geometric and topological methods in natural sciences
- History and methodology of teaching in mathematics

Organizers: The Ministry of Education and Science of Ukraine, Odesa National Academy of Food Technologies, The Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Taras Shevchenko National University of Kyiv, The International Geometry Center.

Conference site: `http://www.imath.kiev.ua/~topology/conf/agma2017`

Наукове видання

Праці міжнародного геометричного центру
2016, т. 9, № 3-4

Комп'ютерна верстка та підготовка оригінал-макету
С. І. Максименко, Є. О. Полулях, Б. Г. Фещенко

Друк: підприємець Голіней О. М.
м. Івано-Франківськ, вул. Галицька, 128
тел. (0342) 58 04 32, +38 050 540 30 64
папір офсетний, друк цифровий
формат 70x100/16, ум. друк. 3.48 арк.
Зам. № 15 від 20.02.2017, наклад 300 прим.

Contents

ISSN print: 2072-9812
ISSN online: 2409-8906
ISO 26324:2012
http://www.geometry-center.com