

Proceedings

of the

INTERNATIONAL GEOMETRY CENTER

Volume 10, No. 2, 2017

Editor in Chief: **Kirillov V.**

Scientific Editor in Chief: **Pryshlyak O.**

Deputes Editor in Chief: **Mykytyuk I., Milka A., Shelekhov A.**

Managing Editor: **Konovenko N.**

Executive Secretary: **Fedchenko Yu.**

Editorial board:

Balan V.

Romania, Bucharest

Banakh T.

Ukraine, Lviv

Fedosov S.

Ukraine, Odesa

Fomenko A.

Russia, Moscow

Fomenko V.

Russia, Taganrog

Glushkov O.

Ukraine, Odesa

Haddad M.

Syria, Damask

Kats I.

Ukraine, Odesa

Kirichenko V.

Russia, Moscow

Maksymenko S.

Ukraine, Kyiv

Matsumoto K.

Japan, Yamagata

Mashkov O.

Ukraine, Lviv

Mikesh J.

Czech Republic, Olomouc

Mormul P.

Poland, Warsaw

Moskaliuk S.

Austria, Wien

Plachta L.

Poland, Krakov

Polulyakh E.

Ukraine, Kyiv

Sabitov I.

Russia, Moscow

Savchenko O.

Ukraine, Kherson

Sergeeva O.

Ukraine, Odesa

Shvets V.

Ukraine, Odesa

Shurygin V.

Russia, Kazan

Volkov V.

Ukraine, Odesa

Zadorozhnyj V.

Ukraine, Odesa

Zarichnyi M.

Ukraine, Lviv

Zelinskyi Y.

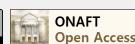
Ukraine, Kyiv

ISSN print: 2072-9812

ISSN online: 2409-8906

ISO 26324:2012

<http://geom-center.onaft.edu.ua>



PROCEEDINGS OF THE INTERNATIONAL GEOMETRY CENTER

The journal is focusing on coverage of the most important problems in mathematics and its applications, particularly in differential geometry, topology, mathematical physics and dynamical systems. It publishes peer reviewed original papers and surveys especially on the following topics: algebraic and analytical methods in geometry; differential geometry as a whole; geometry and topology of differentiable manifolds; general and algebraic topology; geometric and topological methods in the natural sciences; application of geometric methods to modern problems of continuum mechanics, control theory, and mathematical physics; history and methods of teaching mathematics.

Manuscripts are accepted for review with the understanding that the same work is not already published, is not under consideration for publication elsewhere, and that its submission for publication has been approved by all of the coauthors.

Papers are published in Ukrainian, English and Russian.

Journal conducts active cooperation with the following World abstracting and indexing databases: Vernadsky National Library of Ukraine, MathSciNet, CrossRef, eLibrary.ru, Index Copernicus International, Google Scholar, Directory of Open Access scholarly Resources (ROAD), Open Academic Journals Index (OAJI), Directory Indexing of International Research Journals - Citefactor, EBSCOhost, WorldCat, Bielefeld Academic Search Engine (BASE), ResearchBib, Ulrich's Periodicals Directory, Directory of Open Access Journals (DOAJ).

Publisher: ONAFT, Odesa, Kanatna str., Ukraine, 65039.

Web page: <http://geom-center.onaft.edu.ua>

Email: proceedings.igc@gmail.com

Technical support: ONAFT Coordinating Center of Scientific Journals' Publishing.

ПРАЦІ МІЖНАРОДНОГО ГЕОМЕТРИЧНОГО ЦЕНТРУ

Метою видання журналу «Праці міжнародного геометричного центру» є консолідація та підтримка досліджень з геометрії, топології та динамічних систем. Тематична спрямованість журналу пов'язана з висвітленням найбільш важливих та актуальних проблем у галузі математики та її застосувань, зокрема у диференціальній геометрії, топології, математичній фізиці та динамічних системах.

Публікація статей здійснюється за такими напрямками: алгебраїчні методи в геометрії; диференціальна геометрія у цілому; геометрія та топологія диференційованих многовидів; загальна й алгебраїчна топологія; геометричні й топологічні методи у природничих науках; застосування геометричних методів до сучасних задач механіки суцільних середовищ, теорії управління та математичної фізики; історія й методика викладання математики.

До розгляду приймаються лише статті, які є оригінальними роботами авторів, не були опубліковані та не перебувають на розгляді до публікації в інших виданнях.

Роботи публікуються українською, англійською та російською мовами.

Журнал індексується такими світовими базами індексування та реферування: Національна бібліотека України імені Вернадського, MathSciNet, CrossRef, eLibrary.ru, Index Copernicus International, Google Scholar, Directory of Open Access scholarly Resources (ROAD), Open Academic Journals Index (OAJI), Directory Indexing of International Research Journals - Citefactor, EBSCOhost, WorldCat, Bielefeld Academic Search Engine (BASE), ResearchBib, Ulrich's Periodicals Directory, Directory of Open Access Journals (DOAJ).

Видавник: ОНАХТ, вул. Канатна, 112, м. Одеса, Україна, 65039.

Веб-сторінка журналу: <http://geom-center.onaft.edu.ua>

Електронна адреса: proceedings.igc@gmail.com

Технічна підтримка: Координаційний центр видання наукової періодики ОНАХТ.

Рекомендовано до друку та розташування в мережі Інтернет Вченою Радою ОНАХТ 08.09.2017 р., протокол №1.

Зареєстровано Міністерством юстиції України. Свідоцтво: Серія КВ № 13819 - 2793Р від 19.11.2007.

Видається з 2008 року, виходить 4 рази на рік.

Журнал входить до переліку фахових видань України, в яких можуть публікуватися результати дисертаційних робіт на здобуття наукових ступенів доктора і кандидата наук (Додаток 8 до наказу Міністерства освіти і науки України 13.03.2017 № 374).

Відповідальність за достовірність інформації несе автор публікації.

Матеріали друкуються мовою оригіналу. Передрукування матеріалів журналу дозволяється лише за згодою редакції. Ліцензія СС-BY.

On colorings and isometries

Igor Protasov

Abstract. In the first section we prove some isometric versions of the classical Ramsey theorem. In the second section we discuss open problems on metrically Ramsey ultrafilters. Given a metric space (X, d) , we say that a mapping $\chi : [X]^2 \rightarrow \{0, 1\}$ is an isometric coloring if $d(x, y) = d(z, t)$ implies $\chi(\{x, y\}) = \chi(\{z, t\})$, where $[X]^2$ is the set of all two-element subsets of X . A free ultrafilter \mathcal{U} on an infinite metric space (X, d) is called metrically Ramsey if, for every isometric coloring χ of $[X]^2$, there is a member $U \in \mathcal{U}$ such that the set $[U]^2$ is χ -monochrome.

1. ISOMETRIC VERSIONS OF RAMSEY THEOREM

Motivation and results. *For any natural numbers n, r , there exists a natural number m , such that for any r -coloring of edges of the complete graph K_m , there is a monochrome copy of K_n .*

This elegant statement is a graph version of Ramsey theorem, one of the milestones of Ramsey Theory. For history (with exposition of the original paper of Frank Ramsey) and foundations of this branch of Combinatorics, see [1]. For geometrical aspects, in particular, chromatic numbers of \mathbb{R}^n , see [8].

Clearly, K_n contains an isomorphic copy of any graph with $\leq n$ vertices, so *for every finite graph Γ and a natural number r , there exists a natural number m such that, for any r -coloring of edges of K_m , there is a monochrome copy Γ' of Γ .* But this Γ' , as a rule, lies in K_m very non-isometrically with respect to Γ . We need some definitions to explain this passage.

All graphs are supposed to be finite and connected. Every graph Γ with the set of vertices $V(\Gamma)$ and the set of edges $E(\Gamma)$ (each edges in an unordered pair $\{u, v\}$ of two distinct vertices) can be considered as the metric space $(V(\Gamma), d_\Gamma)$ with the path metric d_Γ defined by the rule: $d(u, v)$ is the length (by edges) of a shortest path (called *geodesic*) between u and

2010 Mathematics Subject Classification: 51K05, 05D10

Keywords: isometric coloring, isometric Ramsey theorem, metrically Ramsey ultrafilters

DOI: <http://dx.doi.org/10.15673/tmge.v10i2.649>

v . Given two graphs Γ and G , a mapping $f : V(\Gamma) \rightarrow V(G)$ is an *isometric embedding* if, for any $u, v \in V(\Gamma)$, $d_\Gamma(u, v) = d_G(f(u), f(v))$. Thus, Γ is isometrically embedded into K_m if and only if Γ is complete.

Now we take an arbitrary graph Γ , natural number r and ask if there exists a graph G such that, for every r -coloring of $E(G)$, there is a monochrome isometric copy of Γ ? The answer is positive and follows from Theorem 1.3 in [4]. But the construction of that G in [4] essentially depends on Γ and could be very complicated.

We show that the choice of G is very simple if Γ is isometrically embeddable into the Cartesian product of complete graphs.

For some characterization of graphs isometrically embeddable into K_n^m see [9].

Theorem 1.1. *Assume that a graph Γ is isometrically embedded into K_n^m , and let r be a natural number. Then there exists a natural number N such that, for $G = K_N^{mr-r+1}$ and any r -coloring of $V(G)$ and r -coloring of $E(G)$, the graph G contains an isometrically embedded, vertex-monochrome, and edge-monochrome copy of Γ .*

We recall that the *Cartesian product* $G = G_1 \times \dots \times G_n$ of graphs G_1, \dots, G_n is a graph with the set of vertices

$$V(G) = V(G_1) \times \dots \times V(G_n)$$

and the set of edges

$$E(G) = \bigcup_{i \leq n} E_i(G),$$

defined by the rule: for $u = (u_1, \dots, u_n)$ and $v = (v_1, \dots, v_n)$,

$$uv \in E_i(G) \iff u_i v_i \in E(G_i), \quad u_k = v_k, \quad k \in \{1, \dots, i-1, i+1, \dots, n\}.$$

By K_n^m , we denote the Cartesian product of m complete graphs K_n .

If S_1, \dots, S_n are subgraphs of G_1, \dots, G_n , we say that $S_1 \times \dots \times S_n$ is a *box* in G . We say that a graph $H_1 \times \dots \times H_k$ is *box embeddable* into G if, after some rearrangement of $\{1, \dots, n\}$, there is a box

$$S_1 \times \dots \times S_k \times \{u_{k+1}\} \times \dots \times \{u_n\}$$

in G such that $S_i \simeq H_i$, $i \in \{1, \dots, k\}$, where the sign \simeq means an isomorphism.

We extract Theorem 1.1 from the following statements announced in [6].

Theorem 1.2. *For any natural numbers n, m, r there exists a natural number N such that for every r -coloring of $V(K_N^m)$ the graph K_N^m contains a monochrome box copy of K_n^m .*

Theorem 1.3. *For any natural numbers n, m, r there exists a natural number N such that, for every r -coloring of $E(K_N^{mr-r+1})$ the graph K_N^{mr-r+1} contains a monochrome box copy of K_n^m .*

If G_1, \dots, G_n are directed graphs, we consider $G = G_1 \times \dots \times G_n$ as a graph endowed with the unique orientation \mathcal{O} such that the restriction of \mathcal{O} to each $E_i(G)$ coincides with orientation of $E(G_i)$.

Theorem 1.4. *Let n, m be natural numbers and let G_1, \dots, G_m be acyclically oriented copies of K_n . Then there exists a natural number N such that for any acyclic orientation of K_n^m there is a directed box copy of G_1, \dots, G_m in K_N^m .*

PROOFS

Theorem 1.2 is a simple corollary of Lemma 1 from [2].

We will extract Theorem 1.3 from some more general result.

Say that an edge-coloring χ of $G_1 \times \dots \times G_n$ is a *face coloring* if the restrictions of χ to each $E_i(G_1 \times \dots \times G_n)$ is monochrome.

Theorem 1.5. *For any natural numbers n, k, r there exists a natural number N such that for $G = K_N^k$ and any r -coloring χ of $E(G)$ the restriction of χ to some box $G_1 \times \dots \times G_k$, $G_i \simeq K_n$ is a face coloring.*

Proof. Let us fix n, r and proceed on induction by k . For $k = 1$, we have the Ramsey theorem.

The transition from k to $k + 1$ will be done in five steps.

Step 1. At first we use Theorem 1.2 to choose p such that, for $P = K_p^k$ and any r -coloring of $V(P)$, there is a monochrome box $P_1 \times \dots \times P_k$, $P_i \simeq K_n$ in P .

Now apply the inductive assumption to choose q such that, for $Q = K_q^k$ and any r -coloring Ψ of $E(Q)$, the restriction of Ψ to some box $Q_1 \times \dots \times Q_k$, $Q_i \simeq K_p$ in Q is a face coloring.

Step 2. Given a natural number t , we put $s(t) = tr^{|E(Q)|}$ and note that, by the pigeonhole principle, for every r -coloring Φ of $E(Q \times K_{s(t)})$ there is a subset $T \subset V(K_{s(t)})$ such that $|T| = t$ and all restrictions of Φ to $E(Q \times \{t\})$, $t \in T$ coincide.

Step 3. We define the iterated Ramsey numbers $R^{(i)}(n, r)$ by

$$R^1(n, r) = R(n, r), \quad R^{(i+1)}(n, r) = R(R^{(i)}(n, r), r),$$

where $R(l, r)$ is the minimal natural number such that for any r -coloring of $E(K_{R(l, r)})$ there is a monochrome copy of K_l .

Step 4. We put $t = R^{(|V(P)|)}(n, r)$, choose N such that $N > s(t)$, $N > q$, and take an arbitrary r -coloring χ of $E(K_N^k \times K_N)$.

Regard Q as a box of K_N^k . Then it follows from the definition of $s(t)$, there exists a subset X of $V(K_N)$ such that $|X| = t$ and all restrictions of χ to $E(Q \times \{x\})$, $x \in X$, coincide. Then by the choice of Q , each restriction of χ to $E(P \times \{x\})$, with $P = Q_1 \times \dots \times Q_k$ and $x \in X$, is a face coloring.

Step 5. Enumerate $V(P) = \{u_1, \dots, u_{|V(P)|}\}$ and use Step 4 to choose subsets $X_1, \dots, X_{|V(P)|}$ of X such that $X_1 \supset \dots \supset X_{|V(P)|}$, $|X_{|V(P)|}| = n$, and each $E(\{u_i\} \times Y_i)$ is χ -monochrome, where Y_i is a complete graph with the set of vertices X_i .

By the choice of P , there exists a box $P_1 \times \dots \times P_k$ in P such that $P_i \simeq K_n$ and all $E(\{u\} \times Y_{|V(P)|})$, $u \in V(P_1 \times \dots \times P_k)$, are of the same color.

Hence, χ is a face coloring on $P_1 \times \dots \times P_k \times Y_{|V(P)|}$. \square

To get Theorem 1.3, we apply Theorem 1.5 with $k = (m - 1)r + 1$.

Proof of Theorem 1.4. We fix n and proceed on induction by m . For $m = 1$, the statement is evident because each acyclic orientation of a complete graph is uniquely determined by some ordering of its vertices.

We make the transition from m to $m + 1$ in four steps.

Step 1. Use Theorem 1.2 to choose p such that for $P = K_p^m$ and any $n!$ -coloring of $V(P)$ there exists a monochrome box $P_1 \times \dots \times P_m$ in P with $P_i \simeq K_n$.

Now we use the inductive assumption to choose q such that for $Q = K_q^m$ and any acyclic orientation Ψ of $E(Q)$ the restriction of Ψ to some box $Q_1 \times \dots \times Q_m$ with $Q_i \simeq K_p$ is induced by orientations of $E(Q_1), \dots, E(Q_m)$.

Step 2. Put $s(n) = 2^{|E(Q)|}n$ and choose N so that $N > s(n)$ and $N > q$. We also take an arbitrary acyclic orientation \mathcal{O} of $K_N^m \times K_N$.

Step 3. Regard Q as a box of K_N^m . By the definition of $s(n)$, there exists a subset X of $V(K_N)$ such that $|X| = n$ and all restrictions of \mathcal{O} to $E(Q \times \{x\})$, $x \in X$, coincide. By the choice of Q , each restriction χ to $E(P \times \{x\})$, with $P = Q_1 \times \dots \times Q_m$ and $x \in X$, is induced by orientations of $E(Q_1), \dots, E(Q_m)$.

Step 4. Denote by Y the complete graph on the set of vertices X . Since there are $n!$ acyclic orientations of Y , it follows from the choice of P that there exists a box $P_1 \times \dots \times P_m$ in P such that $P_i \simeq K_n$ and all $\{u\} \times Y$, $u \in P_1 \times \dots \times P_m$, have the same type of orientation: $\{u\} \times vw \in \mathcal{O}$ if and only if $\{u'\} \times vw \in \mathcal{O}$.

Hence, $P_1 \times \dots \times P_m \times Y$ is the desired box in K_N^{m+1} . \square

2. METRICALLY RAMSEY ULTRAFILTERS

We recall that a family \mathfrak{F} of subsets of a set X is a *filter* if $X \in \mathfrak{F}$ and $A, B \in \mathfrak{F}$, $B \subseteq C$ imply $A \cap B \in \mathfrak{F}$, $C \in \mathfrak{F}$. A filter being maximal by inclusion is called an *ultrafilter*. An ultrafilter \mathcal{U} is *free* if $\bigcap \mathcal{U} = \emptyset$.

Let X be an infinite set and let \mathfrak{F} be some family of $\{0, 1\}$ -colorings of the set $[X]^2$ of all two-elements subsets of X . We say that a free ultrafilter \mathcal{U} on X is *Ramsey with respect to \mathfrak{F}* if for any coloring $\chi \in \mathfrak{F}$ there exists $U \in \mathcal{U}$ such that $[U]^2$ is χ -monochrome. In the case in which \mathfrak{F} is the family of all $\{0, 1\}$ -colorings of $[X]^2$ we get the classical definition of *Ramsey ultrafilters*. It is well-known that \mathcal{U} is a Ramsey ultrafilter if and only if \mathcal{U} is *selective*, i.e. for every partition \mathcal{P} of X either $P \in \mathcal{U}$ for some $P \in \mathcal{P}$ or there exists $U \in \mathcal{U}$ such that $|U \cap P| \leq 1$ for each $P \in \mathcal{P}$.

Given a metric space (X, d) , we say that a mapping $\chi : [X]^2 \rightarrow \{0, 1\}$ is an *isometric coloring* if $d(x, y) = d(z, t)$ implies $\chi(\{x, y\}) = \chi(\{z, t\})$. We note that every isometric coloring χ is uniquely determined by some mapping

$$f : d(X, X) \setminus \{0\} \rightarrow \{0, 1\}.$$

Indeed, take an arbitrary $r \in d(X, X) \setminus \{0\}$ and choose $\{x, y\} \in [X]^2$ such that $d(x, y) = r$, and put $f(r) = \chi(\{x, y\})$. Conversely, given a map $f : d(X, X) \setminus \{0\} \rightarrow \{0, 1\}$, we define χ by $\chi(\{x, y\}) = f(d(x, y))$.

We say that a free ultrafilter on an infinite metric space (X, d) is *metrically Ramsey* if \mathcal{U} is Ramsey with respect to all isometric colorings of $[X]^2$.

Let G be a group and let X be a G -space with an action

$$G \times X \rightarrow X, \quad (g, x) \mapsto gx.$$

A coloring $\chi : [X]^2 \rightarrow \{0, 1\}$ is called *G -invariant* if $\chi(\{x, y\}) = \chi(\{gx, gy\})$ for all $\{x, y\} \in [X]^2$ and $g \in G$. A free ultrafilter \mathcal{U} on X is called *G -Ramsey* if \mathcal{U} is Ramsey with respect to the family of all G -invariant colorings of $[X]^2$.

We consider the following special case: X is a metric space and G is a group of isometries of X . Clearly, every isometric coloring of $[X]^2$ is G -invariant. If G is metrically 2-transitive (if $d(x, y) = d(z, t)$ then there is $g \in G$ such that $g\{x, y\} = \{z, t\}$), then every G -invariant coloring of $[X]^2$ is an isometric coloring.

We take the group \mathbb{Z} of integers, put $X = \mathbb{Z}$ and consider the action \mathbb{Z} on X by $(g, x) = g + x$.

- *Is each \mathbb{Z} -Ramsey ultrafilter selective?*

This question appeared in [5] and, to our knowledge, remains open. We endow \mathbb{Z} with the metric $d(x, y) = |x - y|$. By above paragraph an ultrafilter \mathcal{U} on \mathbb{Z} is \mathbb{Z} -Ramsey if and only if \mathcal{U} is metrically Ramsey.

- *Is each metrically Ramsey ultrafilter on \mathbb{Z} -selective?*

This is an equivalent form of the above question. The case of \mathbb{Z} is evidently equivalent to the case of \mathbb{N} .

Some partial results are obtained in [5], [7].

Theorem 2.1. *Let \mathcal{U} be a metrically Ramsey ultrafilter on \mathbb{N} and $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ be a mapping such that $f(x) > x$ for each $x \in \mathbb{N}$. Then there exists a member $U \in \mathcal{U}$ having no subsets of the form $\{a, a + x, a + f(x)\}$. In particular, for $f(x) = 2x$, some member of \mathcal{U} has no arithmetic progressions of length 2.*

We say that a subset $T = \{t_n : t_n < t_{n+1}, n < \omega\}$ of \mathbb{N} is *thin* if $(t_{n+1} - t_n) \rightarrow \infty$ as $n \rightarrow \infty$.

The following theorem is Corollary 2 from [5].

Theorem 2.2. *Every metrically Ramsey ultrafilter \mathcal{U} on \mathbb{N} has a member with no subsets of the form $\{x, y, x + y\}$, $x \neq y$.*

Theorem 2.3. *If a metrically Ramsey ultrafilter \mathcal{U} on \mathbb{N} has a thin subset $T \in \mathcal{U}$ then there exists a mapping $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \omega$ such that the ultrafilter $\varphi(\mathcal{U})$ is selective and φ is finite-to-one on some member $U \in \mathcal{U}$.*

Surprisingly or not, the case of ultrametric spaces is cardinally different and much more easy to explore. By [7] every infinite ultrametric space X has a countable subset Y such that any ultrafilter \mathcal{U} on X satisfying $Y \in \mathcal{U}$ is metrically Ramsey.

In connection with Theorem 2.3, we ask

Question 2.4. *Let \mathcal{U} be a metrically Ramsey ultrafilter on \mathbb{N} . Does there exist a thin subset $U \in \mathcal{U}$?*

Question 2.5. *Assume that a metrically Ramsey ultrafilter \mathcal{U} on \mathbb{N} has a thin member. Is \mathcal{U} selective?*

By [3, Theorem 6.2], there is a coloring $\chi : [\mathbb{R}]^2 \rightarrow \{0, 1\}$ such that if $X \subset \mathbb{R}$ and $[X]^2$ is χ -monochrome then $|X| \leq \omega$.

We endow \mathbb{R} with the natural metric $d(x, y) = |x - y|$ and ask

Question 2.6. *Does there exist an isometric coloring $\chi : [\mathbb{R}]^2 \rightarrow \{0, 1\}$ such that if $[X]^2$ is monochrome then $|X| \leq \omega$?*

We endow the Cantor cube $\{0, 1\}^\omega$ with the standard metric and ask

Question 2.7. *Does there exist an isometric coloring*

$$\chi : \{\{0, 1\}^\omega\}^2 \rightarrow \{0, 1\}$$

such that if $[X]^2$ is monochrome then $|X| \leq \omega$?

REFERENCES

- [1] Ronald L. Graham, Bruce L. Rothschild, Joel H. Spencer. *Ramsey theory*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1980. Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics, A Wiley-Interscience Publication.
- [2] A. W. Hales, R. I. Jewett. Regularity and positional games. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 106:222–229, 1963.
- [3] Kenneth Kunen. Combinatorics. In *Handbook of mathematical logic*, volume 90, pages 371–401. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York-Oxford, 1977.
- [4] Jaroslav Nešetřil, Vojtěch Rödl. Sparse Ramsey graphs. *Combinatorica*, 4(1):71–78, 1984.
- [5] Oleksandr Petrenko, Igor Protasov. Selective and Ramsey ultrafilters on G -spaces. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 58(3):453–459, 2017.
- [6] I. Protasov. Isometric versions of ramsey theorem. *Eureka. A Journal of The Archimedians, to appear*.
- [7] I. Protasov, K. Protasova. Metrically Ramsey ultrafilters. *arXiv:1704.07824*, 2017.
- [8] Alexander Soifer, editor. *Ramsey theory*, volume 285 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser/Springer, New York, 2011. Yesterday, today, and tomorrow, Papers from the workshop held at Rutgers University, Piscataway, NJ, May 27–29, 2009.
- [9] Peter M. Winkler. Isometric embedding in products of complete graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 7(2):221–225, Feb 1984.

Received: May 5, 2017, accepted: July 25, 2017.

Igor Protasov

FACULTY OF COMPUTER SCIENCE AND CYBERNETICS, TARAS SHEVCHENKO NATIONAL UNIVERSITY OF KYIV, ACADEMIC GLUSHKOV AVE. 4D, 03680 KYIV, UKRAINE

Email: i.v.protasov@gmail.com

Warped product semi-slant submanifolds in locally conformal Kaehler manifolds

Koji Matsumoto

Abstract. In 1994, in [13], N. Papaghiuc introduced the notion of semi-slant submanifold in a Hermitian manifold which is a generalization of CR - and slant-submanifolds. In particular, he considered this submanifold in Kaehlerian manifolds, [13]. Then, in 2007, V. A. Khan and M. A. Khan considered this submanifold in a nearly Kaehler manifold and obtained interesting results, [11]. Recently, we considered semi-slant submanifolds in a locally conformal Kaehler manifold and gave a necessary and sufficient conditions for two distributions (holomorphic and slant) to be integrable. Moreover, we considered these submanifolds in a locally conformal Kaehler space form, [4]. In this paper, we define 2-kind warped product semi-slant submanifolds in a locally conformal Kaehler manifold and consider some properties of these submanifolds.

1. INTRODUCTION

A Hermitian manifold \widetilde{M} with structure (J, \widetilde{g}) is called a *locally conformal Kaehler* (an *l.c.K.-*) *manifold* if each point $x \in \widetilde{M}$ has an open neighbourhood U with differentiable function $\rho : U \rightarrow \mathcal{R}$ such that $\widetilde{g}^* = e^{-2\rho} \widetilde{g}|_U$ is a Kaehlerian metric on U , that is, $\nabla^* J = 0$, where J is the almost complex structure, \widetilde{g} is the Hermitian metric, ∇^* is the covariant differentiation with respect to \widetilde{g}^* and \mathcal{R} is a real number space, [14]. A typical example of an l.c.K.-manifold which is not Kaehlerian is Hopf manifold, [14].

Then we know the following statement, see [10]:

2010 Mathematics Subject Classification: 53C40

Keywords: Locally conformal Kaehler manifold, slant distribution, semi-slant submanifold, warped product semi-slant submanifold

DOI: <http://dx.doi.org/10.15673/tmgc.v10i2.650>

Proposition 1.1. *A Hermitian manifold $\widetilde{M}(J, \widetilde{g})$ is l.c.K. if and only if there exists a global closed 1-form α which is called Lee form satisfying*

$$(\widetilde{\nabla}_V J)U = -\widetilde{g}(\alpha^\sharp, U)JV + \widetilde{g}(V, U)\beta^\sharp + \widetilde{g}(JV, U)\alpha^\sharp - \widetilde{g}(\beta^\sharp, U)V \quad (1.1)$$

for any $V, U \in T\widetilde{M}$, where $\widetilde{\nabla}$ denotes the covariant differentiation with respect to \widetilde{g} , α^\sharp is the dual vector field of α , the 1 form β is defined by $\beta(X) = -\alpha(JX)$, β^\sharp is the dual vector field of β and $T\widetilde{M}$ is the tangent bundle of \widetilde{M} .

An l.c.K.-manifold $\widetilde{M}(J, \widetilde{g}, \alpha)$ is called an l.c.K.-space form if it has a constant holomorphic sectional curvature. Then, [10], the Riemannian curvature tensor \widetilde{R} with respect to \widetilde{g} of an l.c.K.-space form with the constant holomorphic sectional curvature c is given by the following formulas:

$$\begin{aligned} 4\widetilde{R}(X, Y, Z, W) = & c\{\widetilde{g}(X, W)\widetilde{g}(Y, Z) - \widetilde{g}(X, Z)\widetilde{g}(Y, W) + \\ & + \widetilde{g}(JX, W)\widetilde{g}(JY, Z) - \widetilde{g}(JX, Z)\widetilde{g}(JY, W) - \\ & - 2\widetilde{g}(JX, Y)\widetilde{g}(JZ, W)\} + \\ & + 3\{P(X, W)\widetilde{g}(Y, Z) - P(X, Z)\widetilde{g}(Y, W) + \\ & + \widetilde{g}(X, W)P(Y, Z) - \widetilde{g}(X, Z)P(Y, W)\} - \\ & - \widetilde{P}(X, W)\widetilde{g}(JY, Z) + \widetilde{P}(X, Z)\widetilde{g}(JY, W) - \\ & - \widetilde{g}(JX, W)\widetilde{P}(Y, Z) + \widetilde{g}(JX, Z)\widetilde{P}(Y, W) + \\ & + 2\{\widetilde{P}(X, Y)\widetilde{g}(JZ, W) + \widetilde{g}(JX, Y)\widetilde{P}(Z, W)\} \end{aligned} \quad (1.2)$$

for any $X, Y, Z, W \in T\widetilde{M}$, where P and \widetilde{P} are respectively defined by

$$P(X, Y) = -(\widetilde{\nabla}_X \alpha)Y - \alpha(X)\alpha(Y) + \frac{1}{2}\|\alpha\|^2\widetilde{g}(X, Y), \quad (1.3)$$

and

$$\widetilde{P}(X, Y) = P(JX, Y) \quad (1.4)$$

for any $X, Y \in T\widetilde{M}$, where $\|\alpha\|$ is the length of the Lee form α .

Let (M_1, g_1) and (M_2, g_2) be two Riemannian manifolds. Then we put $M = M_1 \times M_2$ be the product manifold of M_1 and M_2 . For a positive differentiable function f on M_2 , we define a Riemannian metric tensor g on M as

$$g(U, V) = e^{f^2}g_1(\pi_{1*}U, \pi_{1*}V) + g_2(\pi_{2*}U, \pi_{2*}V) \quad (1.5)$$

for any $U, V \in TM$, where π_1 (resp. π_2) denotes the projection operator of M to M_1 (resp. M_2) and π_{1*} (resp. π_{2*}) is the differential of π_1 (resp. π_2). Then the Riemannian manifold M is called a *warped product manifold* of M_1 and M_2 with the warping function f and we write it $M_1 \otimes_f M_2$, [12].

Let ∇ , ∇_1 and ∇_2 be the covariant differentiation with respect to g , g_1 and g_2 , respectively. Then, we have from (1.5)

$$\begin{aligned}\nabla_X Y &= \nabla_1 X Y - f^2 e^{f^2} g_1(X, Y)(d_2 \log f)^*, \\ \nabla_X Z &= \nabla_Z X = f^2(Z \log f)X, \\ \nabla_Z W &= \nabla_2 Z W\end{aligned}\tag{1.6}$$

for any $X, Y \in TM_1$ and $Z, W \in TM_2$, where $d_2 \log f$ means the differential of $\log f$ and $(d_2 \log f)^*$ is the dual vector field of $d_2 \log f$.

By virtue of (1.6), the curvature tensor R with respect to g is written as

$$\begin{aligned}R(X_1, X_2, X_3, X_4) &= e^{f^2} [R_1(X_1, X_2, X_3, X_4) - \\ &\quad - f^4 e^{f^2} \|\nabla_2 \log f\|^2 \{g_1(X_1, X_4)g_1(X_2, X_3) - \\ &\quad - g_1(X_1, X_3)g_1(X_2, X_4)\}], \\ R(X_1, Z_1, Z_2, X_2) &= -f^2 e^{f^2} \{(2 + f^2)(Z_1 \log f)(Z_2 \log f) + \\ &\quad + \nabla_{2Z_1} \nabla_{2Z_2} \log f\} g_1(X_1, X_2), \\ R(Z_1, Z_2, Z_3, Z_4) &= R_2(Z_1, Z_2, Z_3, Z_4), \\ \text{Other} &= 0,\end{aligned}\tag{1.7}$$

and the Ricci tensor ρ with respect to g is separated as

$$\begin{aligned}\rho(X_1, X_2) &= \rho_1(X_1, X_2) - \\ &\quad - f^2 e^{f^2} \{(2 + n_1 f^2) \|\nabla_2 \log f\|^2 + \delta_2 d_2\} g_1(X_1, X_2), \\ \rho(X_1, Z_1) &= 0, \\ \rho(Z_1, Z_2) &= \rho_2(Z_1, Z_2) - \\ &\quad - n_1 f^2 \{(2 + f^2)(\nabla_{2Z_1} \log f)(\nabla_{2Z_2} \log f) + \nabla_{2Z_1} \nabla_{2Z_2} \log f\},\end{aligned}\tag{1.8}$$

for any $X_1, X_2 \in TM_1$ and $Z_1, Z_2 \in TM_2$, where R_1 (resp. R_2) is the Riemannian curvature tensor with respect to g_1 (resp. g_2) and ρ_1 (resp. ρ_2) is the Ricci tensor with respect to g_1 (resp. g_2), d_2 (resp. δ_2) means the differential (resp. codifferential) with respect to g_2 , $\|\nabla_2 \log f\|$ is the length of $\nabla_2 \log f$ with respect to g_2 and $n_1 = \dim M_1$.

Finally, if we respectively put τ , τ_1 and τ_2 the scalar curvature with respect to g , g_1 and g_2 , then from (1.8), we can easily have

$$\tau = e^{f^2} \tau_1 + \tau_2 - (n_1 - 1)n_1 f^4 \|\nabla_2 \log f\|^2.\tag{1.9}$$

2. SEMI-SLANT-SUBMANIFOLDS IN AN ALMOST HERMITIAN MANIFOLD

In general, between a Riemannian manifold $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ and its Riemannian submanifold (M, g) , we know the Gauss and Weingarten formulas

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \sigma(X, Y), \quad \widetilde{\nabla}_X N = -A_N X + \nabla^\perp_X N \quad (2.1)$$

for any $X, Y \in TM$ and $N \in T^\perp M$, where ∇ is the covariant differentiation with respect to g , σ is the second fundamental form and A_N is the shape operator with respect to N and ∇^\perp is the normal connection, [6]. The second fundamental form σ and the shape operator A are related by $\widetilde{g}(A_N Y, X) = \widetilde{g}(\sigma(Y, X), N)$ for any $Y, X \in TM$ and $N \in T^\perp M$.

The Gauss equation is given by

$$\begin{aligned} \widetilde{R}(U, V, W, Z) &= R(U, V, W, Z) + \widetilde{g}(\sigma(U, Z), \sigma(V, W)) \\ &\quad - \widetilde{g}(\sigma(U, W), \sigma(V, Z)), \end{aligned} \quad (2.2)$$

for any $U, V, W, Z \in TM$, [6].

A submanifold M is said to be totally geodesic, if the second fundamental form σ identically vanishes, [6].

We recall a warped product submanifold in a Riemannian manifold.

Let $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ be a Riemannian manifold. A submanifold (M, g) is called a *warped product submanifold* of \widetilde{M} if it satisfies

- (i) M is a product manifold of 2 submanifolds M_1 and M_2 ,
- (ii) two submanifolds are orthogonal with respect to \widetilde{g} ,
- (iii) for certain Riemannian metric g_1 in M_1 , g_2 in M_2 and a certain positive differentiable function f in M_2 , the metric tensor g is defined by

$$g(U, V) = e^{f^2} g_1(\pi_{1*} U, \pi_{1*} V) + g_2(\pi_{2*} U, \pi_{2*} V) \quad (2.3)$$

for any $U, V \in TM$ is the induced metric of \widetilde{g} , [5].

By virtue of (1.7) and (2.3) the Riemannian curvature \widetilde{R} is separated as

$$\begin{aligned} \widetilde{R}(X_1, X_2, X_3, X_4) &= e^{f^2} \{ R_1(X_1, X_2, X_3, X_4) \\ &\quad - f^4 e^{f^2} \| \log f \|^2 g_1(X_1, X_4) g_1(X_2, X_3) - g_1(X_1, X_3) g_1(X_2, X_4) \} \\ &\quad + \widetilde{g}(\sigma(X_1, X_4), \sigma(X_2, X_3)) - \widetilde{g}(\sigma(X_1, X_3), \sigma(X_2, X_4)), \\ \widetilde{R}(X_1, X_2, X_3, Z_1) &= \widetilde{g}(\sigma(X_1, Z_1), \sigma(X_2, X_3)) - \widetilde{g}(\sigma(X_1, X_3), \sigma(X_2, Z_1)), \\ \widetilde{R}(X_1, X_2, Z_1, Z_2) &= \widetilde{g}(\sigma(X_1, Z_2), \sigma(X_2, Z_1)) - \widetilde{g}(\sigma(X_1, Z_1), \sigma(X_2, Z_2)), \\ \widetilde{R}(X_1, Z_1, Z_2, X_2) &= -f^2 e^{f^2} \{ (2 + f^2)(Z_1 \log f)(Z_2 \log f) \\ &\quad + \nabla_{Z_2} \nabla_{Z_1} \log f \} g_1(X_1, X_2) + \widetilde{g}(\sigma(X_1, X_2), \sigma(Z_1, Z_2)) \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$-\tilde{g}(\sigma(X_1, Z_2), \sigma(Z_1, X_2)),$$

$$\tilde{R}(X_1, Z_1, Z_2, Z_3) = \tilde{g}(\sigma(X_1, Z_3), \sigma(Z_1, Z_2)) - \tilde{g}(\sigma(X_1, Z_2), \sigma(Z_1, Z_3)),$$

$$\begin{aligned} \tilde{R}(Z_1, Z_2, Z_3, Z_4) &= R_2(Z_1, Z_2, Z_3, Z_4) + \\ &\quad + \tilde{g}(\sigma(Z_1, Z_4), \sigma(Z_2, Z_3)) - \tilde{g}(\sigma(Z_1, Z_3), \sigma(Z_2, Z_4)), \end{aligned}$$

for any $X_1, X_2, X_3, X_4 \in TM_1$ and $Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 \in TM_2$, where R_1 (resp. R_2) is the Riemannian curvature tensor with respect to g_1 (resp. g_2).

For a vector field $U \in TM$, the angle between JU and TM is called the *Wirtinger angle* of U .

A differentiable distribution $\mathcal{D}^\theta : x \rightarrow \mathcal{D}_x^\theta$ on M is said to be a *slant* one if for each $U_x \in \mathcal{D}_x^\theta$, the Wirtinger angle of U_x is constant ($= \theta$) for any $x \in M$. In this case, the Wirtinger angle is said to be the *slant angle*. In particular, if TM is slant, then the submanifold is called a *slant* one, [9]. A slant submanifold is *holomorphic* (resp. *totally real*) if its slant angle $\theta = 0$ (resp. $\theta = \frac{\pi}{2}$). A slant submanifold is said to be *proper* if it is neither holomorphic nor totally real.

A submanifold M in \widetilde{M} is called a *semi-slant submanifold* if there exists a differentiable distribution $\mathcal{D} : x \rightarrow \mathcal{D}_x \subset T_x M$ on M satisfying the following conditions:

- (i) \mathcal{D} is holomorphic, i.e., $J\mathcal{D}_x = \mathcal{D}_x$ for each $x \in M$ and
- (ii) the complementary orthogonal distribution $\mathcal{D}^\theta : x \rightarrow \mathcal{D}_x^\theta \subset T_x M$ is slant with slant angle θ , where $T_x M$ is the tangent vector space of M at x , [13].

Remark 2.1. A semi-slant submanifold is a *CR*-submanifold if the slant angle is equal to $\frac{\pi}{2}$, [1], [2], [3], [7], [8], etc.

A semi-slant submanifold M is said to be *proper* if it is neither *CR*-, holomorphic, nor totally real.

In a submanifold M of an almost Hermitian manifold $\widetilde{M}(J, \tilde{g})$, for any $U \in TM$ and $\xi \in T^\perp M$, we write

$$JU = TU + FU, \quad J\xi = t\xi + h\xi, \quad (2.5)$$

where TU (resp. FU) means the tangential (resp. normal) component of JU and $t\xi$ (resp. $h\xi$) means the tangential (resp. normal) component of $J\xi$.

For a semi-slant submanifold M of an almost Hermitian manifold \widetilde{M} , the tangent bundle TM and the normal bundle $T^\perp M$ of M are decomposed as

$$TM = \mathcal{D} \oplus \mathcal{D}^\theta, \quad T^\perp M = F\mathcal{D}^\theta \oplus \nu, \quad (2.6)$$

where ν denotes the orthogonal complementary distribution of $F\mathcal{D}^\theta$ in $T^\perp M$.

Further, in a semi-slant submanifold M we write

$$U = T_1U + T_2U, \quad (2.7)$$

for any $U \in TM$, where T_1U (resp. T_2U) denotes the \mathcal{D} (resp. \mathcal{D}^θ) component of U .

By virtue of (2.7) and (2.7), we can write

$$JU = JT_1U + TT_2U + FT_2U, \quad (2.8)$$

where $JT_1U \in \mathcal{D}$, $TT_2U \in \mathcal{D}^\theta$ and $FT_2U \in F\mathcal{D}^\theta \subset T^\perp M$. Thus if we put

$$QU = JT_1U + TT_2U \quad (2.9)$$

for any $U \in TM$, then Q is an automorphism on TM .

The covariant differentiation $\bar{\nabla}$ of T_1 , T_2 , T , F , t and h are defined as

$$\begin{aligned} (\bar{\nabla}_U T_1)V &= \nabla_U(T_1V) - T_1\nabla_U V, \\ (\bar{\nabla}_U T_2)V &= \nabla_U(T_2V) - T_2\nabla_U V, \\ (\bar{\nabla}_U T)V &= \nabla_U(TV) - T\nabla_U V, \\ (\bar{\nabla}_U F)V &= \nabla_U^\perp(FV) - F\nabla_U V, \\ (\bar{\nabla}_U t)\xi &= \nabla_U(t\xi) - t\nabla_U^\perp \xi, \\ (\bar{\nabla}_U h)\xi &= \nabla_U^\perp(h\xi) - h\nabla_U^\perp \xi \end{aligned} \quad (2.10)$$

for any $U, V \in TM$ and $\xi \in T^\perp M$.

Moreover, if we define the covariant differentiation $\bar{\nabla}$ of Q

$$(\bar{\nabla}_U Q)V = \nabla_U(QV) - Q\nabla_U V \quad (2.11)$$

for any $U, V \in TM$, then using (2.10), we have

$$\begin{aligned} (\bar{\nabla}_U Q)V &= (\tilde{\nabla}_U J)T_1V + J(\bar{\nabla}_U T_1)V + (\bar{\nabla}_U T)(T_2V) \\ &\quad + T(\bar{\nabla}_U T_2)V + J\sigma(U, T_1V) - \sigma(U, JT_1V) \end{aligned} \quad (2.12)$$

for any $U, V \in TM$. In particular, for any $X, Y \in \mathcal{D}$, the equation (2.12) is written as

$$(\bar{\nabla}_X Q)Y = (\tilde{\nabla}_X J)Y + FT_2\nabla_X Y + t\sigma(X, Y) + h\sigma(X, Y) - \sigma(X, TY). \quad (2.13)$$

Now, for $U, V \in TM$, we write

$$(\tilde{\nabla}_U J)V = \mathcal{P}_U V + \mathcal{Q}_U V, \quad (2.14)$$

where $\mathcal{P}_U V$ (resp. $\mathcal{Q}_U V$) denotes the tangential (resp. normal) part of $(\tilde{\nabla}_U J)V$.

3. SEMI-SLANT SUBMANIFOLDS IN AN L.C.K.-MANIFOLD

Let M be a semi-slant submanifold of an l.c.K.-manifold $\widetilde{M}(J, \widetilde{g}, \alpha)$. Then we have from (1.1) and (2.14)

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_U V &= -\widetilde{g}(\alpha_1^\sharp, V)TU + \widetilde{g}(U, V)(T\alpha_1^\sharp + t\alpha_2^\sharp) + \widetilde{g}(TU, V)\alpha_1^\sharp \\ &\quad - \widetilde{g}(T\alpha_1^\sharp + t\alpha_2^\sharp, V)U, \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$Q_U V = -\widetilde{g}(\alpha_1^\sharp, V)FU + \widetilde{g}(U, V)(F\alpha_1^\sharp + h\alpha_2^\sharp) + \widetilde{g}(TU, V)\alpha_2^\sharp,$$

where α_1^\sharp (resp. α_2^\sharp) means the tangential (resp. normal) component of α^\sharp .

In a semi-slant submanifold in an l.c.K.-manifold, we have from (3.1)₂

$$Q_X Y - Q_Y X = 2\widetilde{g}(TX, Y)\alpha_2^\sharp \quad (3.2)$$

for any $X, Y \in \mathcal{D}$.

Using theorems of V. A. Khan and M. A. Khan on integrability of the distributions \mathcal{D} and \mathcal{D}^θ of a semi-slant submanifold in an almost Hermitian manifold, in [4], we proved

Proposition 3.1. (I) *The holomorphic distribution \mathcal{D} of a semi-slant submanifold M in an l.c.K.-manifold $\widetilde{M}(J, \widetilde{g}, \alpha)$ is integrable if and only if*

$$\sigma(X, TY) - \sigma(Y, TX) = Q_X Y - Q_Y X = 2\widetilde{g}(TX, Y)\alpha_2^\sharp \quad (3.3)$$

for any $X, Y \in \mathcal{D}$.

(II) *The slant distribution \mathcal{D}^θ of a semi-slant submanifold M in an locally conformal Kaehler manifold $\widetilde{M}(J, \widetilde{g}, \alpha)$ is integrable if and only if*

$$\begin{aligned} T_1(\nabla_Z TW - \nabla_W TZ + A_{FZ}W - A_{FW}Z + \\ + \widetilde{g}(\alpha_1^\sharp, W)TZ - \widetilde{g}(\alpha_1^\sharp, Z)TW + 2\widetilde{g}(TW, Z)\alpha_1^\sharp) = 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

or equivalently

$$\begin{aligned} T_1\{(\bar{\nabla}_Z T)W - (\bar{\nabla}_W T)Z + T[Z, W] + A_{FZ}W - A_{FW}Z + \\ + \widetilde{g}(\alpha_1^\sharp, W)TZ - \widetilde{g}(\alpha_1^\sharp, Z)TW + 2\widetilde{g}(TW, Z)\alpha_1^\sharp\} = 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

for any $Z, W \in \mathcal{D}^\theta$.

4. WARPED PRODUCT SEMI-SLANT SUBMANIFOLDS IN L.C.K.-MANIFOLDS

Let \mathcal{D} and \mathcal{D}^θ be two integrable distributions on a semi-slant submanifold M of an l.c.K.-manifold $\widetilde{M}(J, \widetilde{g}, \alpha)$. Then (3.3) and (3.4) hold true. Let also $M_{\mathcal{D}}$ (resp. $M_{\mathcal{D}^\theta}$) be the maximal integral submanifold of \mathcal{D} (resp. \mathcal{D}^θ). Then M is a product manifold of $M_{\mathcal{D}}$ and $M_{\mathcal{D}^\theta}$, that is,

$$M = M_{\mathcal{D}} \otimes M_{\mathcal{D}^\theta}. \quad (4.1)$$

We call the submanifold $M_{\mathcal{D}}$ (resp. $M_{\mathcal{D}^\theta}$) the *holomorphic* (resp. *slant component*) of M .

We define the following two type warped product submanifolds

$$M_1 := M_{\mathcal{D}} \otimes_{f_1} M_{\mathcal{D}^\theta} \quad (4.2)$$

for a certain differentiable function f_1 on $M_{\mathcal{D}}$ and

$$M_2 := M_{\mathcal{D}^\theta} \otimes_{f_2} M_{\mathcal{D}} \quad (4.3)$$

for a certain differentiable function f_2 on $M_{\mathcal{D}}$. We say that M_1 (resp. M_2) the *first* (resp. *second*) *type warped product semi-slant submanifold* of an l.c.K.-manifold.

In this paper, we mainly consider the first type warped product semi-slant submanifold.

Let M be the first type warped product semi-slant submanifold in an l.c.K.-manifold \widetilde{M} . Then the induced metric tensor g on M from \widetilde{M} is given by

$$g(U, V) = e^{f_1^2} g_{\mathcal{D}}(\pi_{\mathcal{D}} * U, \pi_{\mathcal{D}} * V) + g_{\mathcal{D}^\theta}(\pi_{\mathcal{D}^\theta} * U, \pi_{\mathcal{D}^\theta} * V) \quad (4.4)$$

for any $U, V \in TM$, where $g_{\mathcal{D}}$ (resp. $g_{\mathcal{D}^\theta}$) denotes the Riemannian metric on $M_{\mathcal{D}}$ (resp. $M_{\mathcal{D}^\theta}$), $\pi_{\mathcal{D}}$ (resp. $\pi_{\mathcal{D}^\theta}$) is the projection operator of M to $M_{\mathcal{D}}$ (resp. $M_{\mathcal{D}^\theta}$) and f_1 is a certain positive differentiable function on $M_{\mathcal{D}}$. Now, we denote by $\widetilde{\nabla}$, ∇ , $\nabla^{\mathcal{D}}$ and $\nabla^{\mathcal{D}^\theta}$ the covariant differentiations with respect to \widetilde{g} , g , $g_{\mathcal{D}}$ and $g_{\mathcal{D}^\theta}$, respectively. Since we have from (1.6)

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \nabla^{\mathcal{D}}_X Y - f_1^2 e^{f_1^2} (d_1 \log f_1)^* g_{\mathcal{D}}(X, Y), \\ \nabla_X Z &= \nabla_Z X = f_1^2 (Z \log f_1) X, \\ \nabla_Z W &= \nabla^{\mathcal{D}^\theta}_Z W \end{aligned} \quad (4.5)$$

for any $X, Y \in \mathcal{D}$ and $Z, W \in \mathcal{D}^\theta$, where we put $(d_1 \log f_1)$ is the differential of $\log f_1$ with respect to $g_{\mathcal{D}}$.

Using Gauss formula and the above equation, we obtain

$$\begin{aligned} \widetilde{\nabla}_X Y &= \nabla^{\mathcal{D}}_Y X - f_1^2 e^{f_1^2} (d_1 \log f_1)^* g_{\mathcal{D}}(X, Y) + \sigma(X, Y), \\ \widetilde{\nabla}_X Z &= \widetilde{\nabla}_Z X = f_1^2 (Z \log f_1) X + \sigma(X, Z), \\ \widetilde{\nabla}_Z W &= \nabla^{\mathcal{D}^\theta}_Z W + \sigma(Z, W) \end{aligned} \quad (4.6)$$

for any $X, Y \in \mathcal{D}$ and $Z, W \in \mathcal{D}^\theta$.

Due to (4.6) between the Riemannian curvature tensors

- $R(U_1, U_2, U_3, U_4)$ with respect to g ,
- $R^{\mathcal{D}}(X_1, X_2, X_3, X_4)$ with respect to $g_{\mathcal{D}}$, and
- $R^{\mathcal{D}^\theta}(Z_1, Z_2, Z_3, Z_4)$ with respect to $g_{\mathcal{D}^\theta}$,

we know the following relations:

$$\begin{aligned}
R(X_1, X_2, X_3, X_4) &= e^{f_1^2} [R^{\mathcal{D}}(X_1, X_2, X_3, X_4) \\
&\quad - f_1^4 e^{f_1^2} \|\nabla^{\mathcal{D}^\theta} \log f_1\|^2 \{g_{\mathcal{D}}(X_1, X_4)g_{\mathcal{D}}(X_2, X_3) \\
&\quad - g_{\mathcal{D}}(X_1, X_3)g_{\mathcal{D}}(X_2, X_4)\}], \\
R(X_1, Z_1, Z_2, X_2) &= -f_1^2 e^{f_1^2} \{(2 + f_1^2)(Z_1 \log f_1)(Z_2 \log f_1) \\
&\quad + \nabla^{\mathcal{D}^\theta}_{Z_1} \nabla^{\mathcal{D}^\theta}_{Z_2} \log f_1\} g_{\mathcal{D}}(X_1, X_2), \\
R(Z_1, Z_2, Z_3, Z_4) &= R^{\mathcal{D}^\theta}(Z_1, Z_2, Z_3, Z_4), \\
\text{Others} &= 0,
\end{aligned} \tag{4.7}$$

for any $X_1, X_2, X_3, X_4 \in \mathcal{D}$ and $Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 \in \mathcal{D}^\theta$.

By virtue of the above equation and the Gauss equation, we have the following

$$\begin{aligned}
\tilde{R}(X_1, X_2, X_3, X_4) &= e^{f_1^2} [R^{\mathcal{D}}(X_1, X_2, X_3, X_4) \\
&\quad - f_1^4 e^{f_1^2} \|\nabla^{\mathcal{D}^\theta} \log f_1\|^2 \{g_{\mathcal{D}}(X_1, X_4)g_{\mathcal{D}}(X_2, X_3) \\
&\quad - g_{\mathcal{D}}(X_1, X_3)g_{\mathcal{D}}(X_2, X_4)\}] + \tilde{g}(\sigma(X_1, X_4), \sigma(X_2, X_3)) \\
&\quad - \tilde{g}(\sigma(X_1, X_3), \sigma(X_2, X_4)), \\
\tilde{R}(X_1, X_2, X_3, Z_1) &= \tilde{g}(\sigma(X_1, Z_1), \sigma(X_2, X_3)) - \\
&\quad - \tilde{g}(\sigma(X_1, X_3), \sigma(X_2, Z_1)), \\
\tilde{R}(X_1, X_2, Z_1, Z_2) &= \tilde{g}(\sigma(X_1, Z_2), \sigma(X_2, Z_1)) - \\
&\quad - \tilde{g}(\sigma(X_1, Z_1), \sigma(X_2, Z_2)), \\
\tilde{R}(X_1, Z_1, Z_2, Z_3) &= \tilde{g}(\sigma(X_1, Z_3), \sigma(Z_1, Z_2)) - \\
&\quad - \tilde{g}(\sigma(X_1, Z_2), \sigma(Z_1, Z_3)), \\
\tilde{R}(X_1, Z_1, Z_2, X_2) &= -f_1^2 e^{f_1^2} \{(2 + f_1^2)(Z_1 \log f_1)(Z_2 \log f_1) \\
&\quad + \nabla^{\mathcal{D}^\theta}_{Z_1} \nabla^{\mathcal{D}^\theta}_{Z_2} \log f_1\} g_{\mathcal{D}}(X_1, X_2) \\
&\quad + \tilde{g}(\sigma(X_1, X_2), \sigma(Z_1, Z_2)) - \tilde{g}(\sigma(X_1, Z_2), \sigma(Z_1, X_2)), \\
\tilde{R}(Z_1, Z_2, Z_3, Z_4) &= R^{\mathcal{D}^\theta}(Z_1, Z_2, Z_3, Z_4) + \tilde{g}(\sigma(Z_1, Z_4), \sigma(Z_2, Z_3)) \\
&\quad - \tilde{g}(\sigma(Z_1, Z_3), \sigma(Z_2, Z_4)),
\end{aligned} \tag{4.8}$$

for any $X_1, X_2, X_3, X_4 \in \mathcal{D}$ and $Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 \in \mathcal{D}^\theta$.

Next, we assume that our ambient manifold is an l.c.K.-space form. Then the curvature tensor \tilde{R} satisfies (1.2). Using this, we can separate the curvature tensor \tilde{R} as

$$\begin{aligned}
4\tilde{R}(X_1, X_2, X_3, X_4) &= c\{\tilde{g}(X_1, X_4)\tilde{g}(X_2, X_3) - \tilde{g}(X_1, X_3)\tilde{g}(X_2, X_4) + \\
&\quad + \tilde{g}(TX_1, X_4)\tilde{g}(TX_2, X_3) - \tilde{g}(TX_1, X_3)\tilde{g}(TX_2, X_4) - \\
&\quad \quad \quad - 2\tilde{g}(TX_1, X_2)\tilde{g}(TX_3, X_4)\} + \\
&\quad + 3\{P(X_1, X_4)\tilde{g}(X_2, X_3) - P(X_1, X_3)\tilde{g}(X_2, X_4) + \\
&\quad + P(X_2, X_3)\tilde{g}(X_1, X_4) - P(X_2, X_4)\tilde{g}(X_1, X_3)\} - \\
&\quad - \tilde{P}(X_1, X_4)\tilde{g}(TX_2, X_3) + \tilde{P}(X_1, X_3)\tilde{g}(TX_2, X_4) - \\
&\quad - \tilde{P}(X_2, X_3)\tilde{g}(TX_1, X_4) + \tilde{P}(X_2, X_4)\tilde{g}(TX_1, X_3) + \\
&\quad + 2\{\tilde{P}(X_1, X_2)\tilde{g}(TX_3, X_4) + \tilde{P}(X_3, X_4)\tilde{g}(TX_1, X_2)\}, \\
4\tilde{R}(X_1, X_2, X_3, Z_1) &= 3\{P(X_1, Z_1)\tilde{g}(X_2, X_3) - P(X_2, Z_1)\tilde{g}(X_1, X_3)\} \\
&\quad - \tilde{P}(X_1, Z_1)\tilde{g}(TX_2, X_3) + \tilde{P}(X_2, Z_1)\tilde{g}(TX_1, X_3) \\
&\quad \quad \quad + 2\tilde{P}(X_3, Z_1)\tilde{g}(TX_1, X_2), \\
2\tilde{R}(X_1, X_2, Z_1, Z_2) &= -c\tilde{g}(TX_1, X_2)\tilde{g}(TZ_1, Z_2) \\
&\quad + \tilde{P}(X_1, X_2)\tilde{g}(TZ_1, Z_2) + \tilde{P}(Z_1, Z_2)\tilde{g}(TX_1, X_2), \tag{4.9} \\
4\tilde{R}(X_1, Z_1, Z_2, X_2) &= c\{\tilde{g}(X_1, X_2)\tilde{g}(Z_1, Z_2) + \tilde{g}(TX_1, X_2)\tilde{g}(TZ_1, Z_2)\} \\
&\quad + 3\{P(X_1, X_2)\tilde{g}(Z_1, Z_2) + P(Z_1, Z_2)\tilde{g}(X_1, X_2)\} \\
&\quad - \tilde{P}(X_1, X_2)\tilde{g}(TZ_1, Z_2) - \tilde{P}(Z_1, Z_2)\tilde{g}(TX_1, X_2), \\
4\tilde{R}(X_1, Z_1, Z_2, Z_3) &= 3\{P(X_1, Z_3)\tilde{g}(Z_1, Z_2) - P(X_1, Z_2)\tilde{g}(Z_1, Z_3)\} \\
&\quad - \tilde{P}(X_1, Z_3)\tilde{g}(TZ_1, Z_2) + \tilde{P}(X_1, Z_2)\tilde{g}(TZ_1, Z_3) \\
&\quad \quad \quad + 2\tilde{P}(X_1, Z_1)\tilde{g}(TZ_2, Z_3), \\
4\tilde{R}(Z_1, Z_2, Z_3, Z_4) &= c\{\tilde{g}(Z_1, Z_4)\tilde{g}(Z_2, Z_3) - \tilde{g}(Z_1, Z_3)\tilde{g}(Z_2, Z_4) + \\
&\quad + \tilde{g}(TZ_1, Z_4)\tilde{g}(TZ_2, Z_3) - \tilde{g}(TZ_1, Z_3)\tilde{g}(TZ_2, Z_4) - \\
&\quad \quad \quad - 2\tilde{g}(TZ_1, Z_2)\tilde{g}(TZ_3, Z_4)\} + \\
&\quad + 3\{P(Z_1, Z_4)\tilde{g}(Z_2, Z_3) - P(Z_1, Z_3)\tilde{g}(Z_2, Z_4) - \\
&\quad \quad \quad + P(Z_2, Z_3)\tilde{g}(Z_1, Z_4)\} - \\
&\quad - \tilde{P}(Z_1, Z_4)\tilde{g}(TZ_2, Z_3) + \tilde{P}(Z_1, Z_3)\tilde{g}(TZ_2, Z_4) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\tilde{P}(Z_2, Z_3)\tilde{g}(TZ_1, Z_4) + \tilde{P}(Z_2, Z_4)\tilde{g}(TZ_1, Z_3) + \\
& + 2\{\tilde{P}(Z_1, Z_2)\tilde{g}(TZ_3, Z_4) + \tilde{P}(Z_3, Z_4)\tilde{g}(TZ_1, Z_2)\}
\end{aligned}$$

for any $X_1, X_2, X_3, X_4 \in \mathcal{D}$ and $Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 \in \mathcal{D}^\theta$.

Thus we have from (4.8) and (4.9) that

$$\begin{aligned}
& 4\{\tilde{g}(\sigma(X_1, X_4), \sigma(X_2, X_3)) - \tilde{g}(\sigma(X_1, X_3), \sigma(X_2, X_4))\} = \\
& - 4e^{f_1^2} R^{\mathcal{D}}(X_1, X_2, X_3, X_4) \\
& + \{c + 4f_1^2 \|\nabla^{\mathcal{D}^\theta} \log f_1\|^2\} \{\tilde{g}(X_1, X_4)\tilde{g}(X_2, X_3) \\
& - \tilde{g}(X_1, X_3)\tilde{g}(X_2, X_4)\} + c\{\tilde{g}(TX_1, X_4)\tilde{g}(TX_2, X_3) \\
& - \tilde{g}(TX_1, X_3)\tilde{g}(TX_2, X_4) - 2\tilde{g}(TX_1, X_2)\tilde{g}(TX_3, X_4)\} \\
& + 3\{P(X_1, X_4)\tilde{g}(X_2, X_3) - P(X_1, X_3)\tilde{g}(X_2, X_4) \\
& + P(X_2, X_3)\tilde{g}(X_1, X_4) - P(X_2, X_4)\tilde{g}(X_1, X_3)\} \\
& - \tilde{P}(X_1, X_4)\tilde{g}(TX_2, X_3) + \tilde{P}(X_1, X_3)\tilde{g}(TX_2, X_4) \\
& - \tilde{P}(X_2, X_3)\tilde{g}(TX_1, X_4) + \tilde{P}(X_2, X_4)\tilde{g}(TX_1, X_3) \\
& + 2\{\tilde{P}(X_1, X_2)\tilde{g}(TX_3, X_4) + \tilde{P}(X_3, X_4)\tilde{g}(TX_1, X_2)\}, \\
& 4\{\tilde{g}(\sigma(X_1, Z_1), \sigma(X_2, X_3)) - \tilde{g}(\sigma(X_1, X_3), \sigma(X_2, Z_1))\} = \\
& 3\{P(X_1, Z_1)\tilde{g}(X_2, X_3) - P(X_2, Z_1)\tilde{g}(X_1, X_3)\} \tag{4.10} \\
& - \tilde{P}(X_1, Z_1)\tilde{g}(TX_2, X_3) + \tilde{P}(X_2, Z_1)\tilde{g}(TX_1, X_3) \\
& + 2\tilde{P}(X_3, Z_1)\tilde{g}(TX_1, X_2), \\
& 2\{\tilde{g}(\sigma(X_1, Z_2), \sigma(X_2, Z_1)) - \tilde{g}(\sigma(X_1, Z_1), \sigma(X_2, Z_2))\} = \\
& - c\tilde{g}(TX_1, X_2)\tilde{g}(TZ_1, Z_2) + \tilde{P}(X_1, X_2)\tilde{g}(TZ_1, Z_2) \\
& + \tilde{P}(Z_1, Z_2)\tilde{g}(TX_1, X_2), \\
& 4\{\tilde{g}(\sigma(X_1, X_2), \sigma(Z_1, Z_2)) - \tilde{g}(\sigma(X_1, Z_2), \sigma(Z_1, X_2))\} = \\
& 4f_1^2 e^{f_1^2} \{(2 + f_1^2)(Z_1 \log f_1)(Z_2 \log f_1) \\
& + \nabla^{\mathcal{D}^\theta}{}_{Z_1} \nabla^{\mathcal{D}^\theta}{}_{Z_2} \log f_1\} g_{\mathcal{D}}(X_1, X_2) \\
& + c\{\tilde{g}(X_1, X_2)\tilde{g}(Z_1, Z_2) + \tilde{g}(TX_1, X_2)\tilde{g}(TZ_1, Z_2)\} \\
& + 3\{P(X_1, X_2)\tilde{g}(Z_1, Z_2) + P(Z_1, Z_2)\tilde{g}(X_1, X_2)\} \\
& - \tilde{P}(X_1, X_2)\tilde{g}(TZ_1, Z_2) - \tilde{P}(Z_1, Z_2)\tilde{g}(TX_1, X_2), \\
& 4\{\tilde{g}(\sigma(X_1, Z_3), \sigma(Z_1, Z_2)) - \tilde{g}(\sigma(X_1, Z_2), \sigma(Z_1, Z_3))\} = \\
& 3\{P(X_1, Z_3)\tilde{g}(Z_1, Z_2) - P(X_1, Z_2)\tilde{g}(Z_1, Z_3)\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\tilde{P}(X_1, Z_3)\tilde{g}(TZ_1, Z_2) + \tilde{P}(X_1, Z_2)\tilde{g}(TZ_1, Z_3) \\
& + 2\tilde{P}(X_1, Z_1)\tilde{g}(TZ_2, Z_3), \\
4\{\tilde{g}(\sigma(Z_1, Z_4), \sigma(Z_2, Z_3)) - \tilde{g}(\sigma(Z_1, Z_3), \sigma(Z_2, Z_4))\} = \\
& -4R^{\mathcal{D}^\theta}(Z_1, Z_2, Z_3, Z_4) \\
& + c\{\tilde{g}(Z_1, Z_4)\tilde{g}(Z_2, Z_3) - \tilde{g}(Z_1, Z_3)\tilde{g}(Z_2, Z_4) \\
& + \tilde{g}(TZ_1, Z_4)\tilde{g}(TZ_2, Z_3) - \tilde{g}(TZ_1, Z_3)\tilde{g}(TZ_2, Z_4) \\
& - 2\tilde{g}(TZ_1, Z_2)\tilde{g}(TZ_3, X_4)\} + 3\{P(Z_1, Z_4)\tilde{g}(Z_2, Z_3) \\
& - P(Z_1, Z_3)\tilde{g}(Z_2, Z_4) + P(Z_2, Z_3)\tilde{g}(Z_1, Z_4) \\
& P(Z_2, Z_4)\tilde{g}(Z_1, Z_3)\} - \tilde{P}(Z_1, Z_4)\tilde{g}(TZ_2, Z_3) \\
& + \tilde{P}(Z_1, Z_3)\tilde{g}(TZ_2, Z_4) - \tilde{P}(Z_2, Z_3)\tilde{g}(TZ_1, Z_4) \\
& + \tilde{P}(Z_2, Z_4)\tilde{g}(TZ_1, Z_3) + 2\{\tilde{P}(Z_1, Z_2)\tilde{g}(TZ_3, Z_4) \\
& + \tilde{P}(Z_3, Z_4)\tilde{g}(TZ_1, Z_2)\},
\end{aligned}$$

for any $X_1, X_2, X_3, X_4 \in \mathcal{D}$ and $Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 \in \mathcal{D}^\theta$. Let

$$\begin{aligned}
& e_1, \dots, e_p, e_1^*, \dots, e_p^*, \\
& e_{2p+1}, \dots, e_{2p+q}, e_{2p+1}^*, \dots, e_{2p+q}^*, \\
& e_{n+q+1}, \dots, e_{n+q+s}, e_{n+q+1}^*, \dots, e_{n+q+s}^*
\end{aligned}$$

be a generalized adapted local frame of \tilde{M} , [4].

Using this frame, the Gauss equation (4.10) is written as

$$\begin{aligned}
4\{\tilde{g}(\sigma_{kh}, \sigma_{ji}) - \tilde{g}(\sigma_{ki}, \sigma_{jh})\} = \\
& -4e_1^2 R^{\mathcal{D}}_{kjih} + f_1^2 \|\nabla^{\mathcal{D}^\theta} \log f_1\|^2 (\delta_{kh}\delta_{ji} - \delta_{ki}\delta_{jh}) \\
& - 3(P_{kh}\delta_{ji} - P_{ki}\delta_{jh} + P_{ji}\delta_{kh} - P_{jh}\delta_{ki}) \\
& + P(Je_k, e_h)\tilde{g}(Je_j, e_i) - P(Je_k, e_i)\tilde{g}(Je_j, e_h) \\
& + P(Je_j, e_i)\tilde{g}(Je_k, e_h) - P(Je_j, e_h)\tilde{g}(Je_k, e_i) \\
& - 2\{P(Je_k, e_j)\tilde{g}(Je_i, e_h) + P(Je_i, e_h)\tilde{g}(Je_k, e_j)\}, \\
4\{\tilde{g}(\sigma_{ja}, \sigma_{ih}) - \tilde{g}(\sigma_{jh}, \sigma_{ia})\} = 3(P_{ja}\delta_{ih} - P_{ia}\delta_{jh}) \\
& - P(Je_j, e_a)\tilde{g}(Je_i, e_h) + P(Je_j, e_a)\tilde{g}(Je_j, e_h) \\
& + 2P(Je_h, e_a)\tilde{g}(Je_j, e_i), \\
2\{\tilde{g}(\sigma_{ia}, \sigma_{hb}) - \tilde{g}(\sigma_{ib}, \sigma_{ha})\} = -c\tilde{g}(Je_i, e_h)\tilde{g}(Te_b, e_a) \\
& + P(Je_b, e_a)\tilde{g}(Je_i, e_h) + P(Je_i, e_h)\tilde{g}(Te_b, e_a),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4\{\tilde{g}(\sigma_{ih}, \sigma_{ba}) - \tilde{g}(\sigma_{ia}, \sigma_{bh})\} &= 4f_1^2\{(2 + f_1^2)(e_b \log f_1)(e_a \log f_1) \\
&\quad + \nabla^{\mathcal{D}^\theta}_{e_b} \nabla^{\mathcal{D}^\theta}_{e_a} \log f_1\} \delta_{ih} + c\{\delta_{ih} \delta_{ba} + \tilde{g}(Je_i, e_h) \tilde{g}(Te_b, e_a)\} \\
&\quad 3(P_{ih} \delta_{ba} + P_{ba} \delta_{ih}) - P(Je_i, e_h) \tilde{g}(Te_b, e_a) \\
&\quad - P(Je_b, e_a) \tilde{g}(Je_i, e_h), \tag{4.11}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4\{\tilde{g}(\sigma_{ha}, \sigma_{cb}) - \tilde{g}(\sigma_{hb}, \sigma_{ca})\} &= 3(P_{ha} \delta_{cb} - P_{hb} \delta_{ca}) \\
&\quad - P(Je_h, e_a) \tilde{g}(Te_c, e_b) + P(Je_h, e_b) \tilde{g}(Te_c, e_a) \\
&\quad + 2P(Je_h, e_c) \tilde{g}(Te_b, e_a),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4\{\tilde{g}(\sigma_{da}, \sigma_{cb}) - \tilde{g}(\sigma_{db}, \sigma_{ch})\} &= -4R^{\mathcal{D}^\theta}_{dcba} + c\{\delta_{da} \delta_{cb} - \delta_{db} \delta_{ca} \\
&\quad + \tilde{g}(Te_d, e_a) \tilde{g}(Te_c, e_b) - \tilde{g}(Te_d, e_b) \tilde{g}(Te_c, e_a) \\
&\quad - 2\tilde{g}(Te_d, e_c) \tilde{g}(Te_b, e_a)\} \\
&\quad + 3(P_{da} \delta_{cb} - P_{db} \delta_{ca} + P_{cb} \delta_{da} - P_{ca} \delta_{db}) \\
&\quad - P(Je_d, e_a) \tilde{g}(Te_c, e_b) + P(Je_d, e_b) \tilde{g}(Te_c, e_a) \\
&\quad - P(Je_c, e_b) \tilde{g}(Te_d, e_a) + P(Je_c, e_a) \tilde{g}(Te_d, e_b) \\
&\quad + 2\{P(Je_d, e_c) \tilde{g}(Te_b, e_a) + P(Je_b, e_a) \tilde{g}(Te_d, e_c)\},
\end{aligned}$$

for any

$$k, j, i, h \in \{1, 2, \dots, 2p\}$$

and

$$d, c, b, a \in \{2p + 1, 2p + 2, \dots, 2p + q\},$$

where we put $\sigma(e_\mu, e_\lambda) = \sigma_{\mu\lambda}$, etc.

The mean curvature vector H and the mean curvature $\|H\|$ are respectively given by

$$H = \frac{1}{n} \sum_{\mu=1}^n \sigma_{\mu\mu}, \quad \|H\|^2 = \frac{1}{n^2} \sum_{\mu, \lambda=1}^n \tilde{g}(\sigma_{\mu\mu}, \sigma_{\lambda\lambda}) \tag{4.12}$$

and the length $\|\sigma\|$ of the second fundamental form σ is given by

$$\|\sigma\|^2 = \sum_{\mu, \lambda=1}^n \tilde{g}(\sigma_{\mu\lambda}, \sigma_{\mu\lambda}) = \sum_{\mu, \lambda=1}^n \sum_{r=n+1}^m \{\tilde{g}(\sigma_{\mu\lambda}, e_r)\}^2 \tag{4.13}$$

for any local orthonormal frame $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ of $T\tilde{M}$.

By virtue of the Gauss equations, we have

$$\sum_{\mu, \lambda=1}^n (R_{\mu\lambda\mu\lambda} - \tilde{R}_{\mu\lambda\mu\lambda}) = \|\sigma\|^2 - n\|H\|^2. \tag{4.14}$$

On the other hand, we have from (4.10) that

$$\begin{aligned}
4 \sum_{\mu, \lambda=1}^n \tilde{R}_{\mu\lambda\mu\lambda} &= -(n^2 + 2n - 3q)c - 6(n-2) \sum_{\mu=1}^n P_{\mu\mu} \\
&\quad - 6 \sum_{b=2p+1}^{2p+q} P_{bb} - 3c \sum_{b,a=2p+1}^{2p+q} T_{ba}T_{ba} + 6 \sum_{b,a=2p+1}^{2p+q} P(Je_b, e_a)T_{ba},
\end{aligned} \tag{4.15}$$

where $T_{ba} = \tilde{g}(T_b^c e_c, e_a)$ for any $c, b, a \in \{2p+1, 2p+2, \dots, 2p+q = n\}$. We know T_{ba} is skew-symmetric.

Moreover, we have from (1.9) and (4.7) that

$$\begin{aligned}
4 \sum_{\mu, \lambda=1}^n R_{\mu\lambda\mu\lambda} &= -(e^{f_1^2} \tau^{\mathcal{D}} + \tau^{\mathcal{D}^\theta}) + 8p f_1^2 \{(2p-1) f_1^2 \|\nabla^{\mathcal{D}^\theta} \log f_1\|^2 + \\
&\quad + 2(2 + f_1^2) \sum_{a=2p+1}^{2p+q} (e_a \log f_1)^2 + 2 \sum_{a=2p+1}^{2p+q} \nabla^{\mathcal{D}^\theta} e_a \nabla^{\mathcal{D}^\theta} e_a \log f_1\},
\end{aligned} \tag{4.16}$$

where $\tau^{\mathcal{D}}$ (resp. $\tau^{\mathcal{D}^\theta}$) denotes the scalar curvature with respect to $g_{\mathcal{D}}$ (resp. $g_{\mathcal{D}^\theta}$).

Substituting (4.15) and (4.16) into (4.14), we obtain

$$\begin{aligned}
4\|\sigma\|^2 &= 4n\|H\|^2 + 8pf\{(2p-1)f_1^2\|\nabla^{\mathcal{D}^\theta} \log f_1\|^2 + \\
&\quad + 2(2 + f_1^2) \sum_{a=2p+1}^{2p+q} (e_a \log f_1)^2\} + (n^2 + 2n - 3q)c + \\
&\quad + 3c \sum_{b,a=2p+1}^{2p+q} (T_{ba})^2 - 4(e^{f_1^2} \tau^{\mathcal{D}} + \tau^{\mathcal{D}^\theta}) + \\
&\quad + 16pf_1^2 \sum_{b,a=2p+1}^{2p+q} \nabla_{e_a}^{\mathcal{D}^\theta} \nabla_{e_a}^{\mathcal{D}^\theta} \log f_1 + 6(n-2) \sum_{\mu=1}^n P_{\mu\mu} + \\
&\quad + 6 \sum_{a=2p+1}^{2p+q} P_{aa} - 6 \sum_{b,a=2p+1}^{2p+q} P(Je_b, e_a)T_{ba}.
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Thus we have

Theorem 4.1. *In a first type warped product semi-slant submanifold in an l.c.K.-space form, the mean curvature satisfies the inequality*

$$\begin{aligned}
& 4n\|H\|^2 + 8pf_1^2\{(2p-1)f_1^2\|\nabla^{\mathcal{D}^\theta} \log f_1\|^2 \\
& + 2(2+f_1^2) \sum_{a=2p+1}^{2p+q} (e_a \log f_1)^2\} + (n^2+2n-3q)c \\
& + 3c \sum_{b,a=2p+1}^{2p+q} \{T_{ba}\}^2 - 4(e^{f_1^2} \tau^{\mathcal{D}} + \tau^{\mathcal{D}^\theta}) \\
& + 16pf_1^2 \sum_{b,a=2p+1}^{2p+q} \nabla_{e_a}^{\mathcal{D}^\theta} \nabla_{e_a}^{\mathcal{D}^\theta} \log f_1 + 6(n-2) \sum_{\mu=1}^n P_{\mu\mu} \\
& + 6 \sum_{a=2p+1}^{2p+q} P_{aa} - 6 \sum_{b,a=2p+1}^{2p+q} P(Je_b, e_a)T_{ba} \geq 0.
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Corollary 4.2. *Under the same condition with Theorem 4.1, the equality case of (4.18) is that the submanifold is locally totally geodesic and the warping function f_1 satisfies*

$$\begin{aligned}
& 8pf_1^2\{(2p-1)f_1^2\|\nabla^{\mathcal{D}^\theta} \log f_1\|^2 + \\
& + 2(2+f_1^2) \sum_{a=2p+1}^{2p+q} (e_a \log f_1)^2\} + (n^2+2n-3q)c + \\
& + 3c \sum_{b,a=2p+1}^{2p+q} \{T_{ba}\}^2 - 4(e^{f_1^2} \tau^{\mathcal{D}} + \tau^{\mathcal{D}^\theta}) + \\
& + 16pf_1^2 \sum_{b,a=2p+1}^{2p+q} \nabla_{e_a}^{\mathcal{D}^\theta} \nabla_{e_a}^{\mathcal{D}^\theta} \log f_1 + 6(n-2) \sum_{\mu=1}^n P_{\mu\mu} + \\
& + 6 \sum_{a=2p+1}^{2p+q} P_{aa} - 6 \sum_{b,a=2p+1}^{2p+q} P(Je_b, e_a)T_{ba} = 0.
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
& (n^2+2n-3q)c + 3c \sum_{b,a=2p+1}^{2p+q} \{T_{ba}\}^2 - 4(e^{f_1^2} \tau^{\mathcal{D}} + \tau^{\mathcal{D}^\theta}) + \\
& 16pf_1^2 \sum_{b,a=2p+1}^{2p+q} \nabla_{e_a}^{\mathcal{D}^\theta} \nabla_{e_a}^{\mathcal{D}^\theta} \log f_1 + 6(n-2) \sum_{\mu=1}^n P_{\mu\mu} +
\end{aligned}$$

$$+ 6 \sum_{a=2p+1}^{2p+q} P_{aa} - 6 \sum_{b,a=2p+1}^{2p+q} P(Je_b, e_a)T_{ba} \leq 0.$$

5. ACKNOWLEDGEMENTS

The author is thankful to the referee for his/her valuable comments which have improved the manuscript.

REREFENCES

- [1] Aurel Bejancu. CR submanifolds of a Kaehler manifold. I. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 69(1):135–142, 1978.
- [2] Aurel Bejancu. CR submanifolds of a Kaehler manifold. II. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 250:333–345, 1979.
- [3] Aurel Bejancu. *Geometry of CR-submanifolds*, volume 23 of *Mathematics and its Applications (East European Series)*. D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1986.
- [4] Vittoria Bonanzinga, Koji Matsumoto. Semi-slant submanifolds in locally conformal Kaehler manifolds. *to appear*.
- [5] Vittoria Bonanzinga, Koji Matsumoto. Warped product CR-submanifolds in locally conformal Kaehler manifolds. *Period. Math. Hungar.*, 48(1-2):207–221, 2004.
- [6] Bang-Yen Chen. *Geometry of submanifolds*. Marcel Dekker, Inc., New York, 1973. Pure and Applied Mathematics, No. 22.
- [7] Bang-Yen Chen. CR-submanifolds of a Kaehler manifold. I. *J. Differential Geom.*, 16(2):305–322, 1981.
- [8] Bang-Yen Chen. CR-submanifolds of a Kaehler manifold. II. *J. Differential Geom.*, 16(3):493–509 (1982), 1981.
- [9] Bang-Yen Chen. *Geometry of slant submanifolds*. Katholieke Universiteit Leuven, Louvain, 1990.
- [10] Toyoko Kashiwada. Some properties of locally conformal Kähler manifolds. *Hokkaido Math. J.*, 8(2):191–198, 1979.
- [11] Viqar Azam Khan, Meraj Ali Khan. Semi-slant submanifolds of a nearly Kaehler manifold. *Turkish J. Math.*, 31(4):341–353, 2007.
- [12] Barrett O’Neill. *Semi-Riemannian geometry*, volume 103 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York, 1983. With applications to relativity.
- [13] Neculai Papaghiuc. Semi-slant submanifolds of a Kaehlerian manifold. *An. Ştiinţ. Univ. Al. I. Cuza Iaşi Sect. I a Mat.*, 40(1):55–61, 1994.
- [14] Izu Vaisman. On locally conformal almost Kähler manifolds. *Israel Journal of Mathematics*, 24(3-4):338–351, Dec 1976.

Received: July 3, 2017, accepted: September 2, 2017.

Koji Matsumoto

2-3-65 NISHI-ODORI, YONEZAWA, YAMAGATA, 992-0059, JAPAN

Email: tokiko_matsumoto@yahoo.com

Characterization of striped surfaces

Sergiy Maksymenko, Eugene Polulyakh

Abstract. Let Z be a non-compact two-dimensional manifold and Δ be a one-dimensional foliation of Z such that ∂Z consists of leaves of Δ and each leaf of Δ is a non-compact closed subset of Z . We obtain a characterization of a subclass of such foliated surfaces (Z, Δ) glued from open strips $\mathbb{R} \times (0, 1)$ with boundary leaves along some of their boundary intervals.

1. INTRODUCTION

Let Z be a non-compact two-dimensional manifold and Δ be a one-dimensional foliation on Z such that each leaf ω of Δ is homeomorphic to \mathbb{R} and is a closed subset of Z .

This kind of foliations was studied by W. Kaplan [7], [8], where he proved that every such foliation on \mathbb{R}^2 has the following properties.

- (1) There exists a pseudoharmonic function $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ taking constant values along leaves of Δ and “strictly monotone in directions transversal to leaves”, see W. Boothby [1], [2], M. Morse and J. Jenkins [6], M. Morse [13] for further developments.
- (2) There exist at most countable family of leaves $\{\omega_i\}_{i \in J}$ such that for every connected component S of $\mathbb{R}^2 \setminus \{\omega_i\}_{i \in J}$ one can find a homeomorphism $\phi : S \rightarrow \mathbb{R} \times (0, 1)$ sending the leaves in S onto horizontal lines $\mathbb{R} \times \{t\}$, $t \in (0, 1)$.

However the procedure of cutting along leaves ω_i was not *canonical*, as Kaplan tried to minimize the total number of strips, and for that reason the closures of connected components $\mathbb{R}^2 \setminus \{\omega_i\}_{i \in J}$ can have a complicated structure. In particular, the above homeomorphism ϕ does not always extend to an embedding of \bar{S} into $\mathbb{R} \times [0, 1]$.

2010 Mathematics Subject Classification: 57R30

Keywords: foliations, striped surface

DOI: <http://dx.doi.org/10.15673/tmgc.v10i2.651>

In [10] the authors of the present paper introduced and studied a class of foliated surfaces (Z, Δ) , called *striped*, glued from strips S being open subsets of $\mathbb{R} \times [0, 1]$ and containing $\mathbb{R} \times (0, 1)$.

Further in [11, Theorem 1.8] they also characterized a subclass of striped surfaces having the property that *the quotient map $p : Z \rightarrow Z/\Delta$ into the space of leaves is a locally trivial fibration with fiber \mathbb{R}* in terms of the so-called *special* leaves, see Definition 2.2. Such leaves are the points of Z/Δ where that space fails to be Hausdorff. It was shown that under the above assumption a foliated surface (Z, Δ) admits “striped structure” if and only if the family of special leaves is locally finite, see Theorem 4.1 below.

In the present paper we introduce a more general notion of *singular* leaves, see Definition 2.5, corresponding to points of Z/Δ that do not have an open neighbourhood U such the pair (\overline{U}, U) is homeomorphic with $([0, 1], (0, 1))$.

The aim of the present paper is to give a complete characterization of striped surfaces: we show that a foliated surface (Z, Δ) admits a “striped structure” if and only if the family of all singular leaves is locally finite, see Theorem 4.4.

Structure of the paper. In §2 we recall necessary definitions of striped surfaces, types of leaves and relationships between them. §3 is devoted to proof of a technical result about cutting a foliated surface along isolated leaves, see Theorem 3.2. §4 contains main results of the paper: characterization of strips and striped surfaces, see Theorems 4.3 and 4.4, based on Theorem 4.2 being an extension of [11, Theorem 1.8] and proved in §5.

2. PRELIMINARIES

Space of leaves of a foliation. A *foliated surface* is a pair (Z, Δ) , where Z is a two-dimensional manifold and Δ is a one-dimensional foliation on Z such that each connected component of ∂Z is a leaf of Δ .

Denote by $Y = Z/\Delta$ the set of all leaves of Δ , and let $p : Z \rightarrow Z/\Delta$ be the natural projection associating to each $z \in Z$ the leaf of Δ containing z . We will endow Y with the quotient topology, so a subset $U \subset Y$ is open if and only if $p^{-1}(U)$ is open in Z . It is well known, that then p becomes an open map, see e.g. [4, Proposition 1.5] or [14, Theorem 4.10].

For a subset $U \subset Z$ its *saturation*, $S(U)$, with respect to Δ is the union of all leaves of Δ intersecting U . Equivalently, $S(U) = p^{-1}(p(U))$. Notice that the openness of p means that for each open $U \subset Z$ its saturation $S(U)$ is open as well. It easily follows from openness of p that for each saturated subset $U \subset Y$ its closure, \overline{U} , is saturated as well.

If U is open and saturated, then by Δ_U we will denote the induced foliation on U whose leaves are connected components of the intersections $\omega \cap U$ over all $\omega \in \Delta$.

By the *Hausdorff closure*, $\text{hcl}(y)$, of a point $y \in Y$ we will mean the intersection of closures of all neighbourhoods of y , that is

$$\text{hcl}(y) = \bigcap_{V \text{ is a neighbourhood of } y} \overline{V}.$$

Evidently, $y \in \text{hcl}(y)$. Moreover, Y is Hausdorff if and only if $\{y\} = \text{hcl}(y)$ for each $y \in Y$.

We will say that a point $y \in Y$ is *special*¹ whenever $\{y\} \neq \text{hcl}(y)$.

Similarly, for a leaf $\omega \in \Delta$ let

$$\text{hcl}(\omega) = \bigcap_{N(\omega)} \overline{S(N(\omega))}, \quad \text{hcl}_S(\omega) = \bigcap_{N_S(\omega)} \overline{N_S(\omega)},$$

where $N(\omega)$ runs over all open neighbourhoods of ω and $N_S(\omega)$ runs over all open saturated neighbourhoods of ω .

Lemma 2.1. [11, Lemma 3.5] *Let $\omega \in \Delta$ and $y = p(\omega)$. Then*

$$\text{hcl}(\omega) = \text{hcl}_S(\omega) = p^{-1}(\text{hcl}(y)), \quad p(\text{hcl}(\omega)) = \text{hcl}(y).$$

This lemma is a consequence of openness of the projection p . It also allows to give the following definition:

Definition 2.2. A leaf $\omega \in \Delta$ will be called *special*² whenever either of the following equivalent conditions hold:

- $\omega \neq \text{hcl}(\omega)$;
- $\omega \neq \text{hcl}_S(\omega)$;
- $p(\omega)$ is a special point of Y , that is $\{p(\omega)\} \neq \text{hcl}(p(\omega))$.

A homeomorphism $h : Z \rightarrow Z'$ between foliated surfaces (Z, Δ) and (Z', Δ') will be called *foliated* if for each leaf $\omega \in \Delta$ its image, $h(\omega)$, is a leaf of Δ' .

Definition 2.3. Fix any $a < b \in \mathbb{R}$ and let $J = [a, b)$ or $J = (a, b]$. Let also $\gamma : J \rightarrow Z$ be a continuous map such that $\gamma(J \cap \{a\}) \in \partial Z$.

Then γ is a *cross section* of Δ , whenever $p \circ \gamma : J \rightarrow Z/\Delta$ is injective, that is for distinct $u, v \in J$ their images $\gamma(u)$ and $\gamma(v)$ belongs to distinct

¹ See also [5, Definition 3] and [3] where such points are called *branch*.

² In [10] authors introduced a class of “striped” foliated surfaces and used the term “*special leaf*” in a slightly distinct sense. Further in [11], [12], and [9] they classified a certain subclass of striped surfaces in terms of special leaves but in the sense of Definition 2.2. We will clarify the difference of definition in [10] with Definition 2.2, see Remark 2.10.

leaves of Δ . Also γ is a *local cross section* of Δ , whenever $p \circ \gamma : J \rightarrow Z/\Delta$ is locally injective.

Theorem 2.4. [12, Theorem 2.8] *Let (Z, Δ) be a connected foliated surface with countable base such that each leaf of Δ is non-compact and is also a closed subset of Z . Suppose also that the family of all **special** leaves in the sense of Definition 2.2 is locally finite. Then the following conditions are equivalent:*

- (A) *the quotient map $p : Z \rightarrow Z/\Delta$ into the space of leaves is a locally trivial fibration with fiber \mathbb{R} and Z/Δ is locally homeomorphic with $[0, 1)$ (though it is not necessarily a Hausdorff space);*
- (B) *for each leaf ω there exists an open saturated neighbourhood foliated homeomorphic with $\mathbb{R} \times V$, where V is an open subset of $[0, 1)$;*
- (C) *each leaf of Δ admits a cross section.*

Definition 2.5. A leaf $\omega \subset \text{Int } Z$ will be called *regular* if there exists a saturated neighbourhood U of ω such that the pair (\overline{U}, U) is foliated homeomorphic with $(\mathbb{R} \times [-1, 1], \mathbb{R} \times (-1, 1))$ via a foliated homeomorphism sending ω onto $\mathbb{R} \times 0$.

Similarly, a leaf $\omega \subset \partial Z$ is *regular* if there exists a saturated neighbourhood U of ω such that the pair (\overline{U}, U) is foliated homeomorphic with $(\mathbb{R} \times [0, 1], \mathbb{R} \times [0, 1))$ via a foliated homeomorphism sending ω onto $\mathbb{R} \times 0$.

A leaf being not regular will be called *singular*.

Let $\text{Spec}(\Delta)$ be the family of all special leaves of Δ and $\text{Sing}(\Delta)$ be the family of all singular leaves.

Lemma 2.6. *Every regular leaf is non-special, that is every special leaf is singular, and so $\text{Spec}(\Delta) \subset \text{Sing}(\Delta)$.*

Proof. Let $\omega \subset \text{Int } Z$ be a regular leaf belonging to the interior of Z , so there exists a saturated neighbourhood U and a foliated homeomorphism

$$\phi : (\overline{U}, U) \rightarrow (\mathbb{R} \times [-1, 1], \mathbb{R} \times (-1, 1))$$

such that $\phi(\omega) = \mathbb{R} \times 0$.

Then for each $t \in (0, 1)$ the set $U_t = \phi^{-1}(\mathbb{R} \times (-t, t))$ is an open foliated neighbourhood of ω and $\overline{U}_t = \phi^{-1}(\mathbb{R} \times [-t, t])$. Hence

$$\text{hcl}(\omega) \subset \bigcap_{t \in (0, 1)} \overline{U}_t = \phi^{-1} \left(\bigcap_{t \in (0, 1)} \mathbb{R} \times [-t, t] \right) = \phi^{-1}(\mathbb{R} \times 0) = \omega,$$

so ω is non-special.

The case $\omega \subset \partial Z$ is similar and we leave it for the reader. □

Strips. A subset $S \subset \mathbb{R}^2$ will be called a *strip* if there exist $u < v \in \mathbb{R}$ such that

- (i) $\mathbb{R} \times (u, v) \subset S \subset \mathbb{R} \times [u, v]$;
- (ii) S is open in the topology of $\mathbb{R} \times [u, v]$.

For such a strip we will use the following notation:

$$\begin{aligned} \partial_- S &:= S \cap \mathbb{R} \times \{u\}, & \partial_+ S &:= S \cap \mathbb{R} \times \{v\}, \\ \partial S &:= \partial_- S \cup \partial_+ S, & \text{Int } S &:= \mathbb{R} \times (u, v). \end{aligned}$$

Notice that the boundary ∂S is open in $\mathbb{R} \times \{u, v\}$ and therefore it is a disjoint union of at most countably many open (possibly unbounded) intervals.

Evidently, each strip S possesses an oriented one-dimensional foliation into horizontal lines $\mathbb{R} \times t$, $t \in (u, v)$, and boundary intervals of ∂S . We will call that foliation *canonical*.

Striped atlas. Let Z be a two-dimensional topological manifold (surface) and $Z_0 = \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda$ be at most countable family of mutually disjoint strips.

A *striped atlas* on Z is a map $q : Z_0 \rightarrow Z$ such that

- (1) q is a *quotient* map, i.e. it is continuous, surjective, and a subset $U \subset Z$ is open if and only if $q^{-1}(U) \cap S_\lambda$ is open in S_λ for each $\lambda \in \Lambda$;
- (2) there exist two disjoint families $\mathcal{X} = \{X_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ and $\mathcal{Y} = \{Y_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ of mutually distinct boundary intervals of Z_0 enumerated by the same set of indexes Γ such that
 - (a) q is injective on $Z_0 \setminus (\mathcal{X} \cup \mathcal{Y})$;
 - (b) $q(X_\gamma) = q(Y_\gamma)$ for each $\gamma \in \Gamma$;
 - (c) the restrictions $q|_{X_\gamma} : X_\gamma \rightarrow q(X_\gamma)$ and $q|_{Y_\gamma} : Y_\gamma \rightarrow q(Y_\gamma)$ are embeddings with closed images.

Notice that each striped atlas q induces on Z a one-dimensional foliation obtained from canonical foliations on the corresponding strips S_λ . We will call it the *canonical* foliation associated to the striped atlas q and denote by Δ . Evidently, each leaf of Δ is a homeomorphic image of \mathbb{R} and is also a closed subset of Z .

A foliated surface (Z, Δ) will be called *striped* whenever Z has a striped atlas for which Δ is a canonical foliation.

Notice also that for each $\gamma \in \Gamma$ we have a “gluing” homeomorphism

$$\phi_\gamma = (q|_{X_\gamma})^{-1} \circ q|_{Y_\gamma} : Y_\gamma \rightarrow X_\gamma, \quad (2.1)$$

so a striped surface is obtained from a family of strips by gluing them along certain boundary intervals by homeomorphisms ϕ_γ , see Figure 2.1.

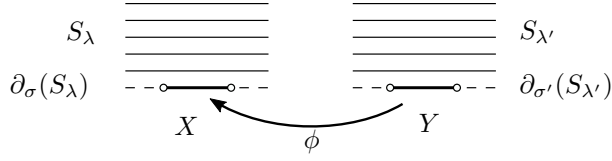


FIGURE 2.1. Gluing boundary intervals

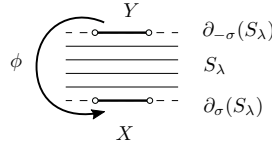
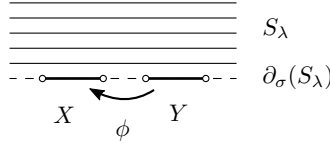
It is allowed to glue two strips along more than one pair of boundary components, and one may also glue boundary components belonging to the same strip and even *to the same side* of the same strip.

The latter possibility is the point of difference between the definition of *special leaves* in [10] and Definition 2.2.

Standard foliated cylinder and Möbius band. Let $S = \mathbb{R} \times [0, 1]$, $s = \pm 1$, and $\phi_s : \mathbb{R} \times \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \times \{1\}$ be the homeomorphism given by $\phi_s(x, 0) = (sx, 1)$. Then the quotient mapping $q : S \rightarrow S/\phi_s$ is a striped atlas consisting of one strip. The corresponding striped surface S/ϕ_s will be called the *standard open cylinder* for $s = +1$, and the *standard Möbius band* for $s = -1$.

Types of leaves of canonical foliation. Let $q : \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda \rightarrow Z$ be a striped atlas. Then each leaf ω of the associated canonical foliation Δ has precisely one of the following properties.

- (a) $\omega = q(\text{Int } S_\lambda)$ for some $\lambda \in \Lambda$.
- (b) $\omega \subset q(\partial_\sigma S_\lambda) \subset \partial Z$ for some $\lambda \in \Lambda$ and $\sigma \in \{-, +\}$. This case splits into two subcases:
 - (b1) $\omega = q(\partial_\sigma S_\lambda)$, so $\partial_\sigma S_\lambda$ consists of a unique leaf;
 - (b2) $\omega \subsetneq q(\partial_\sigma S_\lambda)$, so $\partial_\sigma S_\lambda$ contains more than one leaf.
- (c) $\omega = q(X_\gamma) = q(Y_\gamma)$ for some $\gamma \in \Gamma$, where $X_\gamma \subset \partial_\sigma S_\lambda$, $Y_\gamma \subset \partial_{\sigma'} S_{\lambda'}$ for some $\lambda, \lambda' \in \Lambda$, and $\sigma, \sigma' \in \{-, +\}$. This situation splits into the following three cases:
 - (c1) $\lambda = \lambda'$, $X = \partial_\sigma S_\lambda$, and $Y = \partial_{\sigma'} S_\lambda$, so in this case $\sigma' = -\sigma$, that is we glue distinct sides of the same strip S_λ and each of these sides consists of a unique interval;
 - (c2) $\lambda \neq \lambda'$, $X = \partial_\sigma S_\lambda$, and $Y = \partial_{\sigma'} S_{\lambda'}$;
 - (c31) $\lambda = \lambda'$, $\sigma' = \sigma$, and $X \cup Y = \partial_\sigma S_\lambda$;
 - (c32) $\lambda = \lambda'$, $\sigma' = \sigma$, and $X \cup Y \neq \partial_\sigma S_\lambda$;
 - (c33) all other cases.

FIGURE 2.2. Case (c1) ($\lambda' = \lambda$, $\sigma' = -\sigma$)FIGURE 2.3. Cases (c31) and (c32) ($\lambda' = \lambda$, $\sigma' = \sigma$)

Thus the cases (c31) and (c32) correspond to gluing boundary intervals belonging to the same side of the same strip.

The following lemma characterizes special, regular, and singular leaves of canonical foliations of striped surfaces with types (a)-(c33). In particular, it shows that the difference between singular and special leaves of the canonical foliation constitute leaves of type (c31). The proof is straightforward and we leave it for the reader.

Lemma 2.7. *Let $q : \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda \rightarrow Z$ be a striped atlas and Δ be a canonical foliation on Z . Then the following statements hold.*

- (1) *A leaf $\omega \in \Delta$ is **special**, that is $\omega \neq \text{hcl}(\omega)$, see Definition 2.2, if and only if ω is of one of the types (b2), (c32), (c33).*
- (2) *The following conditions for a leaf $\omega \in \Delta$ are equivalent:*
 - (i) $\omega \in \Delta$ **admits a cross section**;
 - (ii) $\omega \in \Delta$ *has an open saturated neighbourhood foliated homeomorphic with $\mathbb{R} \times V$, where V is an open subset of $[0, 1]$;*
 - (iii) ω *is not of type (c31) or (c32).*
- (3) *A leaf $\omega \in \Delta$ is **regular**, see Definition 2.5, if and only if ω is of one of the types (a), (b1), (c1), or (c2).*
- (4) *Correspondingly, a leaf $\omega \in \Delta$ is **singular** if and only if ω is of one of the types (b2), (c31), (c32), or (c33).*

Definition 2.8. An atlas q is called *reduced* if it does not contain leaves of the types (c1) and (c2).

Denote $D = q\left(\bigsqcup_{\lambda \in \Delta} \partial S_\lambda\right)$. Let also $\text{Spec}(\Delta)$ be the family of all special leaves of Δ and $\text{Sing}(\Delta)$ be the family of all singular leaves.

Corollary 2.9. c.f. [9, Lemma 7.2] *The families $\text{Spec}(\Delta)$, $\text{Sing}(\Delta)$, ∂Z , and D are locally finite, $\text{Spec}(\Delta) \subset \text{Sing}(\Delta)$, and $\partial Z \cup \text{Spec}(\Delta) \subset D$. Moreover, the atlas q is reduced if and only if $\partial Z \cup \text{Spec}(\Delta) = D$.*

Remark 2.10. In [10, Theorem 3.7] the authors proved the following statements.

- (1) If a leaf $\omega \in \Delta$ is of type (c1), then $q(S_\lambda)$ is a connected component of Z foliated homeomorphic either with the standard cylinder or the standard Möbius band.
- (2) If ω is of type (c2), then one can change the striped atlas q replacing strips S_λ and $S_{\lambda'}$ with one strip obtained by gluing S_λ and $S_{\lambda'}$ along X and Y . This reduces the total number of strips in q .

It then follows from (2) that *if Z is connected and distinct from the standard cylinder and Möbius band, then every striped atlas consisting of at most countably many strips can be replaced with a **reduced** one, i.e. having no leaves of types (c1) and (c2)*. In other words, in a reduced atlas each leaf of type (c) is in fact of one of the types (c31), (c32), or (c33).

However, the types (c31), (c32), and (c33) were not distinguished in [10] and a leaf having either of those types was called *special*.

On the other hand, if (Z, Δ) is a striped surface, then, due to (1) of Lemma 2.7, a leaf ω is *special in the sense of Definition 2.2* iff ω is of one of the types (b2), (c32), or (c33).

Such an ambiguity led to an **incorrect formulation** of the definition of a reduced atlas saying that *a striped atlas is called **reduced** whenever $D = \partial Z \cup \text{Spec}(\Delta)$* , see a sentence before [9, Theorem 3.7]. **It must be read** as Definition 2.8 or equivalently as Corollary 2.9, that is $D = \partial Z \cup \text{Sing}(\Delta)$. Then [9, Theorems 7.3 & 8.1] remain true.

Lemma 2.11. *Suppose each leaf of Δ admits a cross section, so it satisfies each of the equivalent conditions (A)-(C) of Theorem 2.4. If the atlas q is reduced, then for a leaf $\omega \subset \text{Int } Z$ the following conditions are equivalent:*

- (i) ω is of type (c33);
- (ii) ω is special, i.e. $\omega \neq \text{hcl}(\omega)$;
- (iii) ω is singular;
- (iv) ω is of type (c), so $\omega = q(X_\gamma) = q(Y_\gamma)$ for some $\gamma \in \Gamma$.

If, in addition, each singular leaf is contained in ∂Z , then there is no leaves of type (c), whence q is a homeomorphism, and so Z is a disjoint union of strips.

Proof. The implications (i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) directly follow from (1) and (4) of Lemma 2.7.

(iii) \Rightarrow (iv). If ω is a singular leaf contained in $\text{Int } Z$, then by (4) of Lemma 2.7 ω is of one of the types (c31), (c32), or (c33), and so it is of type (c).

(iv) \Rightarrow (i). Suppose a leaf ω is of type (c). Since the atlas is reduced, ω is not of the types (c1) and (c2). Moreover, as ω admits a cross section, it follows from (i) of Lemma 2.7 that ω is not of the types (c31) and (c32) as well. Hence ω is of type (c33).

For the last statement notice that by the construction of the atlas each leaf of type (c) is contained in $\text{Int } Z$. Moreover, the equivalence (iii) \Leftrightarrow (iv) implies that every such leaf must also be singular. Hence if each singular leaf ω of Δ is contained in ∂Z , then q will have no leaves of type (c). In other words, no strips are glued via q , whence q is a homeomorphism and Z is a disjoint union of strips. \square

3. CUTTING FOLIATED SURFACE ALONG ISOLATED LEAVES

Definition 3.1. Let (Z, Δ) be a foliated surface. A leaf ω is called *isolated*, if for each $z \in \omega$ there exists a foliated chart that contains this point and intersects ω by an arc. In other words, there exist an open neighbourhood W of z and an imbedding $\phi : (-1, 1) \times (-1, 1) \rightarrow Z$ such that

- $\phi((-1, 1) \times (-1, 1)) = W$,
- $\phi^{-1}(\omega) = (-1, 1) \times 0$,
- $\phi((-1, 1) \times t)$ is contained in some leaf of Δ for each $t \in (-1, 1)$.

Theorem 3.2. *Let (Z, Δ) be a foliated surface and $\text{Sing}(\Delta) \subset \text{Int } Z$ be a locally finite family of isolated leaves. Then there exists a foliated surface $(\tilde{Z}, \tilde{\Delta})$ and a continuous map $p : \tilde{Z} \rightarrow Z$ having the following properties:*

- (1) *p is a quotient map, so a subset $A \subset Z$ is open if and only if $p^{-1}(A)$ is open in \tilde{Z} ;*
- (2) *the restriction $p : \tilde{Z} \setminus p^{-1}(\text{Sing}(\Delta)) \rightarrow Z \setminus \text{Sing}(\Delta)$ is a foliated homeomorphism;*
- (3) *for each leaf $\omega \in \text{Sing}(\Delta)$ the inverse image $p^{-1}(\omega)$ consists of two leaves $\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2 \subset \partial \tilde{Z}$ of $\tilde{\Delta}$ such that $p|_{\tilde{\omega}_i} : \tilde{\omega}_i \rightarrow \omega$, $i = 1, 2$, is a homeomorphism.*

Proof. Put $U = Z \setminus \text{Sing}(\Delta)$ and let $j : U \subset Z$ be the inclusion map. For each leaf $\omega \in \text{Sing}(\Delta)$ and each point $z \in \omega$ let also $U_z = (-1, 1) \times (-1, 1)$,

$$U_z^- = (-1, 1) \times (-1, 0], \quad U_z^+ = (-1, 1) \times [0, 1),$$

and $\phi_z : U_z \rightarrow Z$ be an embedding guaranteed by Definition 3.1, so

- $\phi_z(U_z)$ is open in Z ,
- $\phi_z^{-1}(\omega) = (-1, 1) \times 0$,
- $\phi_z((-1, 1) \times t)$ is contained in some leaf of Δ .

Since $\text{Sing}(\Delta)$ is locally finite, one can additionally assume that

- $\phi_z^{-1}(\text{Sing}(\Delta)) = \phi_z^{-1}(\omega) = (-1, 1) \times 0$.

Let

$$N = U \bigsqcup_{\substack{z \in \omega \in \text{Sing}(\Delta), \\ \sigma = \pm}} U_z^\sigma$$

be the disjoint union of U with sets U_z^- and U_z^+ over all leaves $\omega \in \text{Sing}(\Delta)$ and $z \in \omega$. Then we have a natural map $\hat{p} : N \rightarrow Z$ defined by

$$\begin{aligned} \hat{p}|_U &= j : U \subset Z, \\ \hat{p}|_{U_z^\sigma} &= \phi_z|_{U_z^\sigma} = \phi_{z,\sigma} : U_z^\sigma \rightarrow Z, \quad (z \in \text{Sing}(\Delta), \sigma = \pm). \end{aligned}$$

Lemma 3.2.1. *The map \hat{p} is a quotient map.*

Proof. Since \hat{p} is continuous and surjective and $\hat{p}|_U$ and $\hat{p}|_{U_z^\sigma}$ are embeddings, one should only check that for a subset $A \subset Z$ the following conditions are equivalent:

- (a) A is open;
- (b) $A \cap \hat{p}(U)$ is open in $\hat{p}(U)$, and $A \cap \phi_{z,\sigma}(U_z^\sigma)$ is open in $\phi_{z,\sigma}(U_z^\sigma)$ for all $z \in \text{Sing}(\Delta)$ and $\sigma = \pm$.

The implication (a) \Rightarrow (b) is evident.

(b) \Rightarrow (a) Evidently, the sets $\phi_{z,-}(U_z^-)$ and $\phi_{z,+}(U_z^+)$ form a finite closed cover of $\phi_z(U_z)$ for an arbitrary $z \in \omega \in \text{Sing}(\Delta)$. Therefore, if both intersections $A \cap \phi_{z,-}(U_z^-)$ and $A \cap \phi_{z,+}(U_z^+)$ are open respectively in $\phi_{z,-}(U_z^-)$ and $\phi_{z,+}(U_z^+)$, then $A \cap \phi_z(U_z)$ is open in U_z .

Since the sets $\hat{p}(U)$ and $\phi_z(U_z)$, $z \in \omega \in \text{Sing}(\Delta)$, are open in Z , and so are their intersections with A , it follows that A is open in Z as well. \square

We will now represent \hat{p} as a composition of two continuous maps

$$\hat{p} = p \circ q : N \xrightarrow{q} \tilde{Z} \xrightarrow{p} Z, \quad (3.1)$$

where p will satisfy the statement of Theorem 3.2.

For every $z \in \text{Sing}(\Delta)$ let

$$\mathcal{V}_z = \{U_x^\sigma \mid z \in \phi_x(U_x^\sigma), x \in \text{Sing}(\Delta), \sigma = \pm\}$$

be the family of all U_x^σ whose image in Z contains z . Notice that for each $U_x^\sigma \in \mathcal{V}_z$ there exists $\epsilon > 0$ such that exactly one of the following two conditions holds:

$$\text{either } \phi_x^{-1}(\phi_z(0 \times [0, \epsilon])) \subset U_x^\sigma, \quad \text{or } \phi_x^{-1}(\phi_z(0 \times [-\epsilon, 0])) \subset U_x^\sigma.$$

Hence \mathcal{V}_z is a disjoint union of two subfamilies, see Fig. 3.1:

$$\mathcal{V}_z^- = \left\{ U_x^\sigma \in \mathcal{V}_z \mid \phi_x^{-1} \left(\phi_z(0 \times [-\epsilon, 0]) \right) \subset U_x^\sigma \text{ for some } \epsilon > 0 \right\},$$

$$\mathcal{V}_z^+ = \left\{ U_x^\sigma \in \mathcal{V}_z \mid \phi_x^{-1} \left(\phi_z(0 \times [0, \epsilon]) \right) \subset U_x^\sigma \text{ for some } \epsilon > 0 \right\}.$$

Moreover, we get the following partition of N :

$$\mathcal{F} = \{ \mathcal{F}_x \}_{x \in U} \sqcup \{ \mathcal{G}_{x,\sigma} \}_{x \in \text{Sing}(\Delta), \sigma = \pm},$$

where

$$\mathcal{F}_x = j^{-1}(x) \bigcup_{z \in \text{Sing}(\Delta), \sigma = \pm} \phi_{z,\sigma}^{-1}(x), \quad (x \in U),$$

$$\mathcal{G}_{x,\sigma} = \{ \phi_{z,\nu}^{-1}(x) \mid U_z^\nu \in \mathcal{V}_z^\sigma, z \in \text{Sing}(\Delta), \nu = \pm \}, \quad (x \in \text{Sing}(\Delta), \sigma = \pm).$$

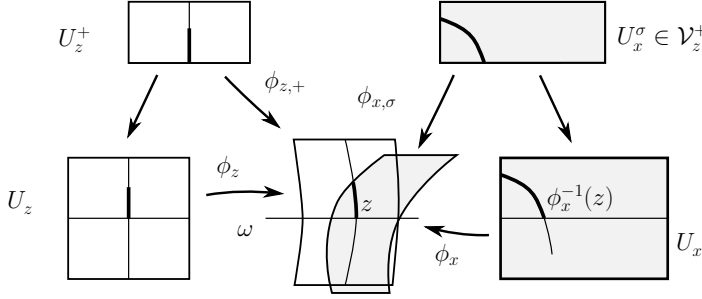


FIGURE 3.1.

Let $\tilde{Z} = N/\mathcal{F}$ be the set of elements of \mathcal{F} , and $q : N \rightarrow \tilde{Z}$ be the quotient map. Endow \tilde{Z} with the corresponding quotient topology: so a subset $A \subset \tilde{Z}$ is open if and only if its inverse $q^{-1}(A)$ is open in N . It easily follows that q is an open map.

Notice that

$$\hat{p}(\mathcal{F}_x) = x, \quad (x \in U), \quad \hat{p}(\mathcal{G}_{x,\sigma}) = x, \quad (x \in \text{Sing}(\Delta), \sigma = \pm),$$

whence \hat{p} induces a map $p : \tilde{Z} \rightarrow Z$ giving the required decomposition $\hat{p} = p \circ q$, see (3.1). Verification of properties (1)-(3) is left for the reader. \square

4. MAIN RESULTS

In this section we will assume that (Z, Δ) is a foliated surface with countable base and such that each leaf of Δ is a non-compact closed subset of Z . Let also $\text{Spec}(\Delta) \subset \text{Sing}(\Delta)$ be the families of all special and singular leaves of Δ respectively.

The following statement characterizes striped surfaces without leaves of types (c31) and (c32).

Theorem 4.1. [11, Theorem 1.8], c.f. also [9, Theorem 7.4]. *The following conditions are equivalent:*

- (1) (Z, Δ) admits a striped atlas without leaves of types (c31) and (c32);
- (2) $\text{Spec}(\Delta)$ is a locally finite family and Δ satisfies each of the equivalent conditions (A)-(C) of Theorem 2.4.

Proof. (1) \Rightarrow (2). By Corollary 2.9 $\text{Spec}(\Delta)$ is locally finite. Also as q has no leaves of types (c31) and (c32), we get from (2) of Lemma 2.7 that each leaf of Δ admits a cross section, i.e. condition (C) of Theorem 2.4 holds.

The implication (2) \Rightarrow (1) is established in [11, Theorem 1.8]. \square

The following extension of Theorem 4.1 allows to check the existence of cross sections only for leaves in the interior of Z .

Theorem 4.2. *Suppose that $\text{Sing}(\Delta)$ is locally finite, and each leaf of Δ contained in $\text{Int } Z$ admits a cross section. Then each leaf in ∂Z also admits a cross section. Hence by Theorem 4.1 (Z, Δ) is a striped surface.*

We will prove it in §5. As a consequence of Theorem 4.2 we get the following characterization of strips.

Theorem 4.3. *Suppose Z is connected, the family $\text{Sing}(\Delta)$ is locally finite, and $\text{Sing}(\Delta) \subset \partial Z$. Then Z is foliated homeomorphic either to a standard cylinder or to a standard Möbius band or to a strip.*

Proof. Suppose (Z, Δ) is neither a standard cylinder nor a standard Möbius band. We should show that then it is foliated homeomorphic to a strip.

By Lemma 2.6 $\text{Spec}(\Delta) \subset \text{Sing}(\Delta)$, whence $\text{Spec}(\Delta)$ is locally finite as well. Moreover, as $\text{Spec}(\Delta) \subset \text{Sing}(\Delta) \subset \partial Z$, it follows that each leaf in $\text{Int } Z$ is regular, and therefore it admits a cross section. Hence by Theorem 4.2 (Z, Δ) admits a reduced atlas q . As $\text{Sing}(\Delta) \subset \partial Z$, it follows from Lemma 2.11 that Z is a disjoint union of strips. But Z is connected, so it is a strip itself. \square

The next statement characterizes all striped surfaces.

Theorem 4.4. *The following conditions are equivalent:*

- (1) (Z, Δ) admits a striped atlas;
- (2) the family $\text{Sing}(\Delta)$ of all **singular** leaves is locally finite.

Proof. The implication (1) \Rightarrow (2) is contained in Corollary 2.9.

(2) \Rightarrow (1). Suppose the family $\text{Sing}(\Delta)$ of singular leaves is locally finite. By assumption each leaf ω of Δ is homeomorphic to \mathbb{R} and is a closed subset of Z . Therefore every foliated chart intersects ω by a discrete family of arcs. Hence each singular leaf is isolated, and therefore by Theorem 3.2 there exists a foliated surface $(\tilde{Z}, \tilde{\Delta})$ and a quotient map $q : \tilde{Z} \rightarrow Z$ such that

- a) the restriction $q : \tilde{Z} \setminus q^{-1}(\text{Sing}(\Delta)) \rightarrow Z \setminus \text{Sing}(\Delta)$ is a foliated homeomorphism, and
- b) for each leaf $\omega \in \text{Sing}(\Delta)$ the inverse image $q^{-1}(\omega)$ consists of two leaves $\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2 \subset \partial\tilde{Z}$ of $\tilde{\Delta}$ such that $q|_{\tilde{\omega}_i} : \tilde{\omega}_i \rightarrow \omega, i = 1, 2$, is a homeomorphism.

Let $\text{Sing}(\tilde{\Delta})$ be the family of all singular leaves of $\tilde{\Delta}$. Since $\text{Sing}(\Delta)$ is locally finite, and p is two-to-one on $\text{Sing}(\tilde{\Delta})$, it follows that $\text{Sing}(\tilde{\Delta})$ is locally finite as well. Moreover, $\text{Sing}(\tilde{\Delta}) \subset \partial\tilde{Z}$, whence by Theorem 4.3 every connected component of \tilde{Z} is a strip. Hence q is a striped atlas for (Z, Δ) . \square

5. PROOF OF THEOREM 4.2

Lemma 5.1. *Let (Z, Δ) be a connected striped surface with countable base and $\partial Z = \emptyset$. Let also $\delta : [0, 1] \rightarrow Z$ be a local cross section such that the points $\delta(0)$ and $\delta(1)$ belong to the same leaf of Δ . Then exactly one of the following two conditions holds:*

- (a) *Z is either a standard cylinder or a standard Möbius band and coincides with the saturation $S(\delta([0, 1]))$ of the image of δ ;*
- (b) *$\delta([0, 1])$ intersects a singular leaf $\omega \in \Delta$.*

Proof. Let $p : Z \rightarrow Z/\Delta$ be the quotient map onto the space of leaves. Then the assumption on δ mean that the map $p \circ \delta : [0, 1] \rightarrow Z/\Delta$ is locally injective and satisfies $p \circ \delta(0) = p \circ \delta(1)$. Hence $p \circ \delta$ induces a continuous map of the circle $\alpha : S^1 = [0, 1]/\{0, 1\} \rightarrow Z/\Delta$.

(a) Suppose Z is either a standard cylinder or a standard Möbius band, so the space of leaves Z/Δ is homeomorphic with the unit circle S^1 . Hence $\alpha : S^1 \rightarrow S^1$ is a continuous locally injective map between circles, and so it must be surjective. The latter means that δ intersect each leaf of Δ , i.e. $Z = S(\delta([0, 1]))$.

(b) Suppose Z is neither a standard cylinder nor a standard Möbius band. Then by [10, Theorem 3.7] Z admits a reduced atlas $q : \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda \rightarrow Z$, that is an atlas having no leaves of types (c1) and (c2). Let $D = q(\bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} \partial S_\lambda)$ and $\text{Sing}(\Delta)$ be the family of all singular leaves of Δ . As $\partial Z = \emptyset$, we get from Corollary 2.9 that $D = \partial Z \cup \text{Sing}(\Delta) = \text{Sing}(\Delta)$.

Hence we should prove that the image of δ intersects D .

Suppose $\delta([0, 1]) \cap D = \emptyset$. Then $\delta([0, 1]) \subset q(\text{Int } S_\lambda)$ for some $\lambda \in \Lambda$. Consider the following composition of maps:

$$\beta = \pi \circ q^{-1} \circ \delta : [0, 1] \xrightarrow{\delta} q(\text{Int } S_\lambda) \xrightarrow{q^{-1}} \text{Int } S_\lambda = \mathbb{R} \times (u, v) \xrightarrow{\pi} (u, v),$$

where π is the projection onto the second coordinate.

Then $\beta : [0, 1] \rightarrow (0, 1)$ is a locally injective (that is strictly monotone) continuous map satisfying $\beta(0) = \beta(1)$ which is impossible. Hence $\delta([0, 1])$ intersects $D = \text{Sing}(\Delta)$. \square

Now we can prove Theorem 4.2. One can assume that Z is connected and $\partial Z \neq \emptyset$.

Let $\text{Spec}(\Delta)$ be the family of all special leaves of Δ . Then, by Lemma 2.6, $\text{Spec}(\Delta) \subset \text{Sing}(\Delta)$, whence $\text{Spec}(\Delta)$ is locally finite as well. Moreover, by the assumption each leaf in $\text{Int } Z$ satisfies condition (C) of Theorem 2.4. Hence, by Theorem 4.1, the foliated surface $(\text{Int } Z, \Delta_{\text{Int } Z})$ admits a striped atlas.

Suppose there exists a leaf ω of Δ belonging to ∂Z and having no cross sections. Then ω is singular. We will find a sequence of singular leaves converging to ω . This will give a contradiction with the assumption that $\text{Sing}(\Delta)$ is locally finite.

Let $x \in \omega$, $\phi : (-1, 1) \times [0, 1] \rightarrow Z$ be a foliated local chart at x such that $\phi(0, 0) = x$, and $\delta : [0, 1] \rightarrow Z$ be defined by $\delta(t) = \phi(0, t)$.

Since ω does not admit cross sections, it follows that for each $\varepsilon > 0$ the curve $\delta((0, \varepsilon)) \subset \text{Int } Z$ intersects some leaf of Δ more than once. So, one can find $a_\varepsilon < b_\varepsilon \in (0, \varepsilon)$ such that $\delta(a_\varepsilon)$ and $\delta(b_\varepsilon)$ belong to the same leaf. As each leaf in $\text{Int } Z$ admits a cross section, it follows that $\delta((0, \varepsilon))$ is a local cross section. Hence, $\delta : [a_\varepsilon, b_\varepsilon] \rightarrow \text{Int } Z$ is also a local cross section.

First suppose $\text{Int } Z$ is either the standard cylinder or a Möbius band. Then by (a) of Lemma 5.1 $S(\delta([a_\varepsilon, b_\varepsilon])) = \text{Int } Z$, that is the composition

$$p \circ \delta : [a_\varepsilon, b_\varepsilon] \xrightarrow{\delta} \text{Int } Z \xrightarrow{p} \text{Int } Z / \Delta_{\text{Int } Z} = S^1$$

is surjective. But this will contradict to continuity of $p \circ \delta$ when $\varepsilon \rightarrow 0$.

Therefore $\text{Int } Z$ is neither the standard cylinder nor a Möbius band. Hence, by Lemma 5.1, there exists a point $c_\varepsilon \in [a_\varepsilon, b_\varepsilon]$ belonging to a certain singular leaf ω_ε .

This implies that arbitrary small neighbourhood of x intersects infinitely many singular leaves, whence $\text{Sing}(\Delta)$ is not locally finite which contradicts to the assumption.

REREFENCES

- [1] William M. Boothby. The topology of regular curve families with multiple saddle points. *Amer. J. Math.*, 73:405–438, 1951.
- [2] William M. Boothby. The topology of the level curves of harmonic functions with critical points. *Amer. J. Math.*, 73:512–538, 1951.
- [3] C. Godbillon, G. Reeb. Fibrés sur le branchement simple. *Enseignement Math. (2)*, 12:277–287, 1966.
- [4] Claude Godbillon. *Feuilletages*, volume 98 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1991. Études géométriques. [Geometric studies], With a preface by G. Reeb.
- [5] André Haefliger, Georges Reeb. Variétés (non séparées) à une dimension et structures feuilletées du plan. *Enseignement Math. (2)*, 3:107–125, 1957.
- [6] James Jenkins, Marston Morse. Contour equivalent pseudoharmonic functions and pseudoconjugates. *Amer. J. Math.*, 74:23–51, 1952.
- [7] Wilfred Kaplan. Regular curve-families filling the plane, I. *Duke Math. J.*, 7:154–185, 1940.
- [8] Wilfred Kaplan. Regular curve-families filling the plane, II. *Duke Math. J.*, 8:11–46, 1941.
- [9] S. Maksymenko, E. Polulyakh, Yu. Soroka. Homeotopy groups of one-dimensional foliations on surfaces. *Proceedings of the International Geometry Center*, 10(1):22–46, 2017.
- [10] Sergiy Maksymenko, Eugene Polulyakh. Foliations with non-compact leaves on surfaces. *Proceedings of Geometric Center*, 8(3–4):17–30, 2015.
- [11] Sergiy Maksymenko, Eugene Polulyakh. Foliations with all nonclosedleaves on noncompact surfaces. *Methods Funct. Anal. Topology*, 22(3):266–282, 2016.
- [12] Sergiy Maksymenko, Eugene Polulyakh. One-dimensional foliations on topological manifolds. *Proceedings of Geometric Center*, 9(2):1–23, 2016.
- [13] Marston Morse. The existence of pseudoconjugates on Riemann surfaces. *Fund. Math.*, 39:269–287 (1953), 1952.
- [14] Itiro Tamura. *Topology of foliations: an introduction*, volume 97 of *Translations of Mathematical Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1992.

Received: July, 15, 2017, accepted: August 28, 2017.

Sergiy Maksymenko

INSTITUTE OF MATHEMATICS OF NAS OF UKRAINE, TERESHCHENKIVSKA STR. 3, KYIV, 01004, UKRAINE

Email: maks@imath.kiev.ua

ORCID: orcid.org/0000-0002-0062-5188

Eugene Polulyakh

INSTITUTE OF MATHEMATICS OF NAS OF UKRAINE, TERESHCHENKIVSKA STR. 3, KYIV, 01004, UKRAINE

Email: polulyah@imath.kiev.ua

Властивості спряжених функцій у гіперкомплексному просторі

М. В. Стефанчук

Abstract. We introduce new notions of linearly convex and conjugated functions in multidimensional hypercomplex space being a n -product of quaternions. There are investigated properties of these objects.

Анотація. В даній роботі вводиться поняття лінійно опуклих та спряжених функцій у n -вимірному гіперкомплексному просторі \mathbb{H}^n , досліджуються їхні властивості.

1. ЛІНІЙНО ОПУКЛІ ФУНКЦІЇ

В даній роботі ми узагальнюємо деякі результати щодо багатозначних функцій у комплексному просторі \mathbb{C}^n (див. [1]) на n -вимірний гіперкомплексний простір \mathbb{H}^n , $n = 1, 2, \dots$, що є прямим добутком n -копій тіла кватерніонів \mathbb{H} ($\mathbb{H}^1 := \mathbb{H}$) [2], [3]. Для довільної пари

$$x = (x_1, \dots, x_n), \quad y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{H}^n$$

визначимо скалярний добуток $\langle x, y \rangle$ за формулою:

$$\langle x, y \rangle := \sum_{m=1}^n x_m y_m.$$

Означення 1.1. Функція $f: \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}$ називається *багатозначною*, якщо образом точки $x \in \mathbb{H}^n$ є множина $f(x) \in \mathbb{H}$.

Область визначення такої функції будемо позначати через

$$E_f := \{x \in \mathbb{H}^n \mid \text{існує таке } y \in \mathbb{H}, \text{ що } y = f(x)\}.$$

Означення 1.2. Функція $l: \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}$ називається *афінною*, якщо її графіком є гіперплощина.

УДК 514.17, 517.55

Ключові слова: багатозначна функція, афінна функція, лінійно опукла функція, спряжена функція

DOI: <http://dx.doi.org/10.15673/tmgc.v10i2.652>

Означення 1.3. Багатозначна функція $f: \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}$ називається *лінійно опуклою*, якщо для довільної пари точок $(x_0, y_0) \in (\mathbb{H}^n \times \mathbb{H}) \setminus \Gamma(f)$ існує афінна функція $l: \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}$, така, що $y_0 = l(x_0)$ і $\Gamma(l) \cap \Gamma(f) = \emptyset$ для всіх $x \in \mathbb{H}^n$, де через $\Gamma(l)$ та $\Gamma(f)$ позначено графіки функцій l та f відповідно.

Означення 1.4. *Лінійно угнутою* функцією називається така багатозначна функція $f: \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}$, для якої функція $\varphi = \mathbb{H} \setminus f \in$ лінійно опуклою.

Це означає, що $\mathbb{H}^{n+1} \setminus \Gamma(f)$ є графіком лінійно опуклої функції, тобто що через кожну точку $(x_0, y_0) \in \Gamma(f)$ проходить графік афінної функції, який повністю міститься у $\Gamma(f)$.

Означення 1.5. *Багатозначною афінною функцією* називається функція, лінійно опукла і лінійно угнута одночасно, і для якої знайдеться принаймні одна точка $x \in \mathbb{H}^n$, в якій кожна з множин $f(x) \cap \mathbb{H}$ та $\mathbb{H} \setminus f(x)$ є непорожньою.

Означення лінійно опуклої функції можна поширити на багатозначні функції, які приймають значення в розширеній гіперкомплексній площині $\mathbb{H}^o = \mathbb{H} \cup \{\infty\}$, компактифікованій однією точкою.

Наведемо деякі приклади лінійно опуклих функцій.

Означення 1.6. Функція

$$W_E(y) = \mathbb{H}^o \setminus \bigcup_{x \in E} \langle x, y \rangle$$

називається *опорною функцією* множини $E \subset \mathbb{H}^n$.

Означення 1.7. Якщо $E \subset \mathbb{H}^n$ – лінійно опукла множина, то функція

$$\delta_E(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \in E, \\ \infty, & \text{якщо } x \notin E, \end{cases}$$

називається її *індикаторною функцією*.

Легко переконатися, що опорна та індикаторна функції лінійно опуклі.

Теорема 1.8. Якщо f_α , $\alpha \in A$, є сім'єю лінійно опуклих функцій, де A – довільна множина індексів, то функція $f = \bigcap_{\alpha \in A} f_\alpha$ є лінійно опуклою.

Доведення. Маємо $\Gamma(f) = \bigcap_{\alpha \in A} \Gamma(f_\alpha)$. Візьмемо довільну точку

$$(x_0, y_0) \in (\mathbb{H}^n \times \mathbb{H}) \setminus \Gamma(f) = (\mathbb{H}^n \times \mathbb{H}) \setminus \bigcap_{\alpha \in A} \Gamma(f_\alpha).$$

Тоді

$$(x_0, y_0) \in (\mathbb{H}^n \times \mathbb{H}) \setminus \Gamma(f_\alpha)$$

для деякого α , а тому існує афінна функція $l: \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}$, графік якої не перетинає $\Gamma(f_\alpha)$. Тому він тим більше не перетинає $\Gamma(f)$. Отже, функція f є лінійно опуклою. \square

2. СПРЯЖЕНІ ФУНКЦІЇ

Означення 2.1. Функцією, *спряженою* з f , називається функція, що задається рівністю

$$f^*(y) = \mathbb{H}^o \setminus \bigcup_{x \in \mathbb{H}^n} (\langle x, y \rangle - f(x)). \quad (2.1)$$

З означення спряженої функції випливає гіперкомплексний аналог нерівності Юнга-Фенхеля [1]:

$$\langle x, y \rangle \notin f(x) + f^*(y). \quad (2.2)$$

Співвідношення (2.2) можна переписати у вигляді

$$\langle x, y \rangle \in \mathbb{H} \setminus (f(x) + f^*(y)),$$

або

$$f(x) \cap (\langle x, y \rangle - f^*(y)) = \emptyset$$

при всіх $x, y \in \mathbb{H}^n$.

Знайдемо функцію, спряжену до функції f^* :

$$f^{**}(x) = (f^*)^*(x) = \mathbb{H}^o \setminus \bigcup_{y \in \mathbb{H}^n} (\langle x, y \rangle - f^*(y)).$$

Приклад 2.2. Спряженою з багатозначною афінною функцією

$$f(x) = \langle x, y_0 \rangle + f(\Theta),$$

де $f(\Theta) \subset \mathbb{H}$ — множина, яка є образом точки $\Theta = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{H}^n$, є функція

$$\begin{aligned} f^*(y) &= \mathbb{H}^o \setminus \bigcup_{x \in \mathbb{H}^n} (\langle x, y \rangle - \langle x, y_0 \rangle - f(\Theta)) = \\ &= \mathbb{H}^o \setminus \bigcup_{x \in \mathbb{H}^n} (\langle x, y - y_0 \rangle - f(\Theta)) = \\ &= \begin{cases} \mathbb{H}^o \setminus (-f(\Theta)), & \text{якщо } y = y_0, \\ \infty, & \text{якщо } y \neq y_0. \end{cases} \end{aligned}$$

Приклад 2.3. Нехай $E \subset \mathbb{H}^n$, $\mathbb{H}^n \setminus E \neq \emptyset$ і $f(x) = \delta_E(x)$. Тоді

$$f^*(y) = \mathbb{H}^o \setminus \bigcup_{x \in \mathbb{H}^n} (\langle x, y \rangle - \delta_E(x)) = \mathbb{H}^o \setminus \bigcup_{x \in \mathbb{H}^n \subset E} \langle x, y \rangle,$$

тобто спряженою з індикаторною функцією власної підмножини E буде опорна функція цієї множини.

Теорема 2.4. Для кожної багатозначної функції $f: \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}$ справедливе включення $f \subset f^{**}$.

Доведення. Візьмемо довільну пару точок

$$x = (x_1, \dots, x_n), \quad y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{H}^n.$$

З нерівності (2.2) отримаємо

$$\langle x, y \rangle - f^*(y) \cap f(x) = \emptyset,$$

тобто

$$\langle x, y \rangle - f^*(y) \subset \mathbb{H}^o \setminus f(x),$$

а тому

$$\mathbb{H}^o \setminus (\langle x, y \rangle - f^*(y)) \supset f(x).$$

Взявши в останньому включенні перетин по всіх $y \in \mathbb{H}^n$, отримаємо такі включення

$$\bigcap_{y \in \mathbb{H}^n} [\mathbb{H}^o \setminus (\langle x, y \rangle - f^*(y))] \supset f(x),$$

або

$$\mathbb{H}^o \setminus \bigcup_{y \in \mathbb{H}^n} (\langle x, y \rangle - f^*(y)) \supset f(x).$$

Останнє включення означає, що $f \subset f^{**}$. Теорему доведено. \square

Означення 2.5. Багатозначна функція $f: \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}$ називається *відкритою* (відповідно, *замкненою* чи *компактною*), коли її графік є відкритою (відповідно, замкненою чи компактною) множиною в \mathbb{H}^{n+1} .

Теорема 2.6. Нехай $f: \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}$ — багатозначна функція. Тоді спряжена до неї функція f^* є лінійно опуклою. Якщо f — відкрита, то f^* — замкнена.

Доведення. Значення спряженої функції можна записати у вигляді

$$f^*(y) = \bigcap_{x \in \mathbb{H}^n} (\mathbb{H}^o \setminus (\langle x, y \rangle - f(x))).$$

При фіксованому x функція

$$y \mapsto \mathbb{H}^o \setminus (\langle x, y \rangle - f(x))$$

є багатозначною афінною функцією по y , а тому її можна подати у вигляді

$$y \mapsto \langle x, y \rangle + [\mathbb{H}^o \setminus (-f(x))]. \quad (2.3)$$

Отже f^* є перетином лінійно опуклих функцій виду (2.3), а тому за теоремою 1.8 f^* є лінійно опуклою функцією.

Крім того, якщо f є відкритою, то кожна з функцій (2.3) є замкненою, а отже f^* буде також замкненою. \square

Означення 2.7. Лінійно опукла функція називається *власною*, якщо хоча б для одного x виконується співвідношення: $f(x) \cap \mathbb{H} \neq \emptyset$ і для всіх x має місце нерівність $\mathbb{H} \setminus f(x) \neq \emptyset$.

Теорема 2.8. *Нехай f — власна лінійно опукла функція. Тоді f^* — власна функція.*

Доведення. Якщо $x_0 \in E_f$, то

$$f^*(y) = \mathbb{H}^o \setminus \bigcup_{x \in \mathbb{H}^n} (\langle x, y \rangle - f(x)) \subset \mathbb{H}^o \setminus (\langle x_0, y \rangle - f(x_0)).$$

Відповідно,

$$\mathbb{H} \setminus f^*(y) \supset \langle x_0, y \rangle - f(x_0) \neq \emptyset$$

для всіх y . З іншого боку, оскільки f — власна лінійно опукла функція, то існує афінна функція $l(x) = \langle x, y \rangle + \alpha$, графік якої не перетинає $\Gamma(f)$. Тоді для цього y матимемо, що

$$(\langle x, y \rangle + \alpha) \cap f(x) = \emptyset,$$

а отже

$$(\langle x, y \rangle - f(x)) \cap -\alpha = \emptyset,$$

і значить

$$-\alpha \subset \mathbb{H}^o \setminus (\langle x, y \rangle - f(x)).$$

Тому $f^*(y) \supset -\alpha \neq \emptyset$. □

Наступна теорема [4] є гіперкомплексним аналогом теореми Фенхеля-Моро.

Теорема 2.9. *Нехай багатозначна функція $f: \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}$ така, що*

$$\mathbb{H} \setminus f(x) \neq \emptyset$$

*для всіх $x \in \mathbb{H}^n$. Тоді $f^{**} = f$ у тому і лише у тому випадку, коли f є лінійно опуклою.*

Доведення. Покажемо, що рівність $f^{**} = f$ рівносильна лінійній опуклості функції f .

Якщо $f^{**} = f$, то, згідно з теоремою 2.6, функція, спряжена до довільної функції, буде лінійно опуклою. Якщо $f(\mathbb{H}^n) \equiv \infty$, то рівність $f^{**} = f$ отримується з формул (2.1) і (2.2). Маємо $f^*(y) = \mathbb{H}$ для всіх $y \in (\mathbb{H}^n)^*$ і $f^{**} = \infty$. Оскільки $f \subset f^{**}$ за теоремою 2.4, то достатньо показати, що для лінійно опуклої функції справедливе обернене включення $f \supseteq f^{**}$.

Нехай в деякій точці x_0 має місце нерівність $f(x_0) \neq f^{**}(x_0)$. Тоді існує афінна функція $l(x) = \langle x, y_0 \rangle + \alpha$, така, що $\Gamma(l) \cap \Gamma(f) = \emptyset$ і $w_0 = \langle x_0, y_0 \rangle + \alpha$, де $w_0 \in f^{**}(x_0) \setminus f(x_0)$. Тоді

$$\begin{aligned} f^*(y_0) &= \mathbb{H}^o \setminus \bigcup_{x \in \mathbb{H}^n} (\langle x, y_0 \rangle - f(x)) = \\ &= \bigcap_{x \in \mathbb{H}^n} [\mathbb{H}^o \setminus (\langle x, y_0 \rangle - f(x))] \supsetneq (-\alpha), \end{aligned}$$

так як $[\langle x, y_0 \rangle - f(x)] \neq -\alpha$ для всіх $x \in \mathbb{H}^n$. Для функції f^{**} справедливе включення

$$\begin{aligned} f^{**}(x_0) &= \bigcap_{y \in (\mathbb{H}^n)^*} [\mathbb{H}^o \setminus (\langle x_0, y \rangle - f^*(y))] \subset \\ &\subset \mathbb{H}^o \setminus (\langle x_0, y_0 \rangle - f^*(y_0)) \subset \\ &\subset \mathbb{H}^o \setminus (\langle x_0, y_0 \rangle + \alpha) = \mathbb{H}^o \setminus w_0. \end{aligned}$$

Тому $w_0 \notin f^{**}(x_0)$, що суперечить вибору точки $w_0 \in f^{**}(x_0) \setminus f(x_0)$. \square

Означення 2.10. Функція f називається *однорідною*, якщо

$$f(\lambda x) = \lambda f(x)$$

для всіх скалярів $\lambda \in \mathbb{H} \setminus 0$.

Теорема 2.11. *Нехай $f: \mathbb{H}^n \setminus \Theta \rightarrow \mathbb{H}$, $\Theta = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{H}^n$, є власною лінійно опуклою однорідною функцією і $f(\Theta) = \mathbb{H} \setminus 0$. Тоді f є опорною функцією деякої множини.*

Доведення. Розглянемо множину

$$A = \{y \in \mathbb{H}^n \mid f(x) \not\geq \langle x, y \rangle \text{ для всіх } x \in \mathbb{H}^n\}$$

і покажемо, що

$$f(x) = \mathbb{H}^o \setminus \bigcup_{y \in A} \langle x, y \rangle = W_A(x).$$

Якщо $y \in A$, то $\langle x, y \rangle \notin f(x)$ і $0 \notin \langle x, y \rangle - f(x)$ для всіх x . Відповідно,

$$f^*(y) = \mathbb{H}^o \setminus \bigcup_{x \in \mathbb{H}^n} (\langle x, y \rangle - f(x)) = \mathbb{H}^o \setminus (\mathbb{H}^o \setminus 0) = 0.$$

Якщо $y \notin A$, то $\langle x_0, y \rangle \in f(x_0)$ для деякого $x_0 \in \mathbb{H}^n$, $x_0 \neq 0$. Тоді

$$\begin{aligned} f^*(y) &= \mathbb{H}^o \setminus \bigcup_{x \in \mathbb{H}^n} (\langle x, y \rangle - f(x)) = \\ &= \mathbb{H}^o \setminus \left(f(\Theta) \bigcup_{x \in \mathbb{H}^n \setminus \Theta} (\langle x, y \rangle - f(x)) \right) = \\ &= \mathbb{H}^o \setminus ((\mathbb{H}^o \setminus 0) \cup (\langle x_0, y \rangle - f(x_0))) = \\ &= \mathbb{H}^o \setminus ((\mathbb{H} \setminus 0) \cup 0) = \infty. \end{aligned}$$

Згідно з теоремою 2.8 одержуємо, що f^* є власною функцією. Тому $A \neq \emptyset$ і $f^* = \delta_A$. Беручи до уваги гіперкомплексну теорему Фенхеля-Моро 2.9 і приклад 2.3, одержуємо рівність $f = f^{**} = \delta_A^* = W_A$. Тобто f — опорна функція множини A . \square

Наслідок 2.12. Якщо однорідна лінійно опукла функція $f: \mathbb{H}^n \setminus \Theta \rightarrow \mathbb{H}$ є відмінною від афінної, то

$$f^*(y) = \delta_{E_{f^*}}(y).$$

Теорема 2.13. Якщо $f: \mathbb{H}^n \setminus \Theta \rightarrow \mathbb{H}$ — однорідна лінійно опукла функція, відмінна від афінної, то

$$f(x) = \mathbb{H}^o \setminus \bigcup_{y \in E_{f^*}} \langle x, y \rangle.$$

Доведення. Якщо f — лінійно опукла функція, то за теоремою Фенхеля-Моро $f = f^{**} = \delta^*$. Беручи до уваги приклад 2.3, переконаємось, що f є опорною функцією множини E_{f^*} . \square

Означення 2.14. Нехай $f_\alpha: \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}$, $\alpha \in A$, є багатозначними функціями. Функцію

$$\left(\bigcup_{\alpha} f_{\alpha}\right)(x) := \bigcup_{\alpha} f_{\alpha}(x)$$

назвемо *об'єднанням функцій* f_{α} , а функцію

$$\left(\bigcap_{\alpha} f_{\alpha}\right)(x) := \bigcap_{\alpha} f_{\alpha}(x)$$

— їх *перетином*.

Для спряжених функцій має місце теорема двоїстості.

Теорема 2.15. Нехай $f_{\alpha}: \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}$, $\alpha \in A$, є багатозначними функціями. Тоді виконується рівність

$$\left(\bigcup_{\alpha} f_{\alpha}\right)^* = \bigcap_{\alpha} f_{\alpha}^*.$$

Доведення. З виразу (2.1) для спряжених функцій одержуємо

$$\begin{aligned} \left(\bigcup_{\alpha} f_{\alpha}\right)^*(y) &= \mathbb{H}^o \setminus \bigcup_{x \in \mathbb{H}^n} (\langle x, y \rangle - \bigcup_{\alpha} f_{\alpha}(x)) = \\ &= \mathbb{H}^o \setminus \bigcup_{x \in \mathbb{H}^n} \bigcup_{\alpha} (\langle x, y \rangle - f_{\alpha}(x)) = \\ &= \mathbb{H}^o \setminus \bigcup_{\alpha} \bigcup_{x \in \mathbb{H}^n} (\langle x, y \rangle - f_{\alpha}(x)) = \\ &= \bigcap_{\alpha} (\mathbb{H}^o \setminus \bigcup_x (\langle x, y \rangle - f_{\alpha}(x))) = \bigcap_{\alpha} f_{\alpha}^*(y). \end{aligned}$$

Теорему доведено. \square

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Ю. Б. Зелинский. *Выпуклость. Избранные главы*. К : Ін-т математики НАН України, 2012.
- [2] И. Л. Кантор, А. С. Солодовников. *Гиперкомплексные числа*. М : Наука, 1973.
- [3] Г. А. Мкртчян. *О гиперкомплексно выпуклых множествах*. К : ИМ АН УССР, 1987.
- [4] М. В. Стефанчук, М. В. Ткачук. Лінійно опуклі та спряжені функції в гіперкомплексному просторі. *Збірник праць Ін-ту математики НАН України*, 12(3):225–235, 2015.

Надійшла до редакції 12 серпня 2017, прийнята до друку 1 вересня 2017.

Стефанчук Марія Володимирівна

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАН УКРАЇНИ, вул. ТЕРЕЩЕНКІВСЬКА, 3, м. Київ, 01004,
УКРАЇНА

Email: mariast@imath.kiev.ua

О “шестиугольных” решениях некоторых уравнений в частных производных

А. М. Шелехов

Abstract. For some famous PDE we find the solutions corresponded to hexagonal three-webs.

Аннотация. Для некоторых известных уравнений в частных производных найдены решения, которым соответствует шестиугольная три-ткань.

1. Введение. Всякое решение

$$z = f(x, y) \tag{1}$$

дифференциального уравнения определяет на плоскости переменных x, y три-ткань W — три семейства линий

$$x = \text{const}, \quad y = \text{const}, \quad f(x, y) = \text{const},$$

см. [1]. Это дает возможность, с одной стороны, использовать геометрию три-тканей для описания свойств решений дифференциальных уравнений, с другой — классифицировать три-ткани по типу решений. Уравнение (1) связывает параметры x, y и z линий три-ткани W , проходящих через одну точку, и называется уравнением этой ткани. Функция f называется *функцией ткани W* .

Самые простые три-ткани — параллельные — образованы семействами параллельных прямых. Эквивалентные (локально диффеоморфные) им три-ткани называются параллелизуемыми или регулярными. Регулярные три-ткани (и только они) допускают максимальную (трехпараметрическую) группу автоморфизмов, [4]. Другая их характеристика состоит в том, что на них замыкаются конфигурации Томсена (T), изображенные на рис. 1.

Ключевые слова: уравнение в частных производных, криволинейная три-ткань, регулярная три-ткань, конфигурация Томсена на три-ткани, шестиугольная конфигурация

DOI: <http://dx.doi.org/10.15673/tmgc.v10i2.653>

Здесь линии первого, второго и третьего семейств ткани изображаются вертикальными, горизонтальными и наклонными линиями соответственно. При этом вертикальные линии отмечены параметрами x_α , горизонтальные — параметрами y_α , наклонные — параметрами z_α . Строится фигура T , например, следующим образом. Берем две произвольные линии x_1 и y_1 из первого и второго семейств, затем достаточно близко к точке их пересечения проводим наклонные линии z_1 и z_2 . Через получившиеся точки пересечения проводим вертикальные и горизонтальные линии x_2 и y_2 , x_3 и y_3 , как показано на рис. 1. Получим точки A и B . Полученная конфигурация называется *фигурой Томсена* или T . Если точки A и B лежат на одной линии третьего семейства ткани, то говорят, что фигура T замыкается.

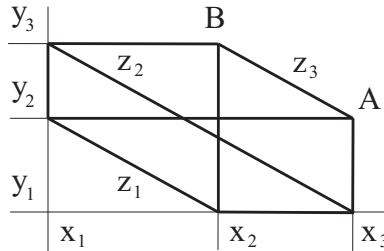


Рис. 1.

В частности, если линии x_2 , y_2 и z_2 проходят через одну точку, то конфигурация Томсена называется *шестиугольной* конфигурацией или фигурой H . Поэтому регулярные ткани называют еще *шестиугольными*.

Известно [1], [4], что уравнение (1) определяет регулярную три-ткань тогда и только тогда, когда оно имеет вид

$$z = f(\alpha(x) + \beta(y)). \quad (2)$$

В этой статье мы рассматриваем некоторые известные уравнения в частных производных и ищем их решения вида (2). Такие решения можно назвать “шестиугольными”. Рассмотрены уравнение Эйлера для однородных функций, уравнение Лапласа, уравнение теплопроводности и уравнение колебания.

В некотором смысле эта статья дополняет работы [2], [3], в которых рассматривались три-ткани, определяемые обыкновенными дифференциальными уравнениями.

Все рассматриваемые в работе функции считаются вещественно-аналитическими.

2. Пусть f — дифференцируемая однородная функция степени k . Тогда f удовлетворяет известному уравнению Эйлера

$$xf_x + yf_y = kf. \quad (3)$$

С другой стороны, пусть f имеет вид (2). Тогда

$$f_x = f'\alpha', \quad f_y = f'\beta', \quad (4)$$

где штрих обозначает производную по аргументу $\theta = \alpha + \beta$.

Подставляя в (3), получим

$$xf'\alpha'(x) + yf'\beta'(y) = kf,$$

откуда следует

$$d \ln f = k \frac{d(\alpha + \beta)}{x\alpha'(x) + y\beta'(y)}. \quad (5)$$

Поэтому,

$$\frac{k}{x\alpha'(x) + y\beta'(y)} = \varphi(\alpha + \beta),$$

где φ — некоторая гладкая функция.

Дифференцируя последнее равенство по x и y находим отношение полученных производных:

$$\frac{x\alpha''(x)}{\alpha'(x)} = \frac{y\beta''(y)}{\beta'(y)}.$$

Левая часть этого равенства зависит только от x , правая — только от y . Следовательно, это отношение есть постоянная, обозначим ее c . Тогда после интегрирования получим:

$$\alpha'(x) = ax^c, \quad \beta'(y) = by^c,$$

где a и b — постоянные. Подставляя в (5), найдем f и уравнение рассматриваемой три-ткани:

$$z = p(ax^{c+1} + by^{c+1})^{\frac{k}{c+1}}, \quad (6)$$

где p — постоянная. Таким образом, доказана

Теорема 1. *Решение уравнения (3) имеет вид (2) тогда и только тогда, когда f приводится к виду (6).*

При изоморфизме $x^{c+1} \rightarrow \bar{x}$, $y^{c+1} \rightarrow \bar{y}$, $z^{c+1} \rightarrow \bar{z}$ уравнение (6) переходит в более простое:

$$\bar{z} = p(a\bar{x} + b\bar{y})^k.$$

3. Найдем подкласс регулярных три-тканей в классе тканей, определяемых гармоническими функциями. Пусть f имеет вид (2) и удовлетворяет уравнению

$$f_{xx} + f_{yy} = 0. \quad (7)$$

Из уравнений (4) вытекают равенства

$$f_{xx} = f''(\alpha')^2 + f'\alpha'', \quad f_{yy} = f''(\beta')^2 + f'\beta''.$$

В результате уравнение (7) примет вид

$$f''((\alpha')^2 + (\beta')^2) + f'(\alpha'' + \beta'') = 0.$$

Это равенство перепишем в виде

$$\alpha'' + \beta'' = ((\alpha')^2 + (\beta')^2) g(\alpha + \beta), \quad (8)$$

где обозначено

$$g(\alpha + \beta) = -\frac{f''}{f'}. \quad (9)$$

Продифференцировав равенство (8) по x , а затем по y , придем к уравнению

$$\alpha' \beta' \left(g''((\alpha')^2 + (\beta')^2) + 2g'\alpha'' + 2g'\beta'' \right) = 0.$$

Так как $\alpha(x)$ и $\beta(y)$ не являются постоянными, то $\alpha'\beta' \neq 0$. Приравняв к нулю выражение в скобках, с учетом (8) получим уравнение $g'' + 2gg' = 0$, или $g'' + (g^2)' = 0$. Отсюда $g' + g^2 = c$, где c — постоянная.

В случае $c = a^2$ получим решение $g = -a \coth a(b - \theta)$, где b — постоянная.

В случае $c = -a^2$ получим решение $g = a \tan a(b - \theta)$.

В случае $c = 0$ получим решение $g = (b + \theta)^{-1}$.

В первом случае равенство (8) примет вид:

$$(\alpha + \beta)'' \tanh a(b - \alpha - \beta) = -a((\alpha')^2 + (\beta')^2).$$

Тейлоровское разложение функции $\tanh a(b - \alpha - \beta)$ существенно содержит произведения вида $\alpha(x)\beta(y)$. В правой части таких слагаемых нет. Следовательно, последнее равенство возможно только в случае $(\alpha + \beta)'' = 0$, $(\alpha')^2 + (\beta')^2 = 0$, но тогда ткань не существует.

Точно так же рассуждаем и во втором случае.

В третьем случае равенство (8) принимает вид:

$$(\alpha + \beta)''(b + \alpha + \beta) = (\alpha')^2 + (\beta')^2. \quad (10)$$

Продифференцировав его по x и y , получим

$$\alpha' \beta''' + \alpha''' \beta' = 0. \quad (11)$$

Отсюда

$$\frac{\alpha'''}{\alpha'} = -\frac{\beta'''}{\beta'} = q = \text{const.}$$

Предположим сначала, что третьи производные не нули и пусть $q = -p^2$. Тогда решения этих уравнений имеют вид:

$$\alpha = \frac{r}{p} \cos px + \frac{s}{p} \sin px, \quad \beta = \frac{u}{p} \cosh py + \frac{v}{p} \sinh py. \quad (12)$$

Здесь r, s, u, v — постоянные.

Подставим найденные решения в (10) и учтем, что

$$\alpha''\beta + \alpha\beta'' = \alpha\beta \left(\frac{\alpha''}{\alpha} + \frac{\beta''}{\beta} \right) \alpha\beta(-p^2 + p^2) = 0.$$

После преобразований получим:

$$bp(-r \cos px - s \sin px + u \cosh py + v \sinh py) + u^2 - v^2 = r^2 + s^2.$$

Отсюда следует, что $b = 0$ и

$$u = d \cosh \beta_0, \quad v = d \sinh \beta_0, \quad r = \cos \alpha_0, \quad s = d \sin \alpha_0.$$

В результате получаем:

$$\alpha = \frac{d}{p} \cos(\alpha_0 - px), \quad \beta = \frac{d}{p} \cosh(\beta_0 + py). \quad (13)$$

Найдем теперь f . В рассматриваемом случае равенство (9) (с учетом $b = 0$) принимает вид:

$$\frac{f''}{f'} = -\theta^{-1}.$$

Интегрируя, находим

$$f = c \ln \theta + c_1.$$

Поставляя сюда $\theta = \alpha + \beta$ и учитывая (13), окончательно получаем:

$$f = c \ln(\cos(\alpha_0 - px) + \cosh(\beta_0 + py)) + \bar{c}. \quad (14)$$

4. Рассмотрим исключённый случай

$$\alpha''' = \beta''' = 0. \quad (15)$$

Тогда

$$\alpha = \alpha_0 x^2 + 2\alpha_1 x + \alpha_2, \quad \beta = \beta_0 y^2 + 2\beta_1 y + \beta_2.$$

Подставляя в (10) и приравнявая коэффициенты при соответствующих степенях, получим систему соотношений:

$$\begin{aligned} 2\alpha_0(\alpha_0 + \beta_0) &= 4\alpha_0^2, & 2\beta_0(\alpha_0 + \beta_0) &= 4\beta_0^2, \\ 4\alpha_1(\alpha_0 + \beta_0) &= 8\alpha_0\alpha_1, & 4\beta_1(\alpha_0 + \beta_0) &= 8\beta_0\beta_1, \end{aligned}$$

$$(b + \alpha_2 + \beta_2)(\alpha_0 + \beta_0) = 2(\alpha_1^2 + \beta_1^2).$$

Эти соотношения сводятся к следующим:

$$\alpha_0 = \beta_0, \quad \alpha_0(b + \alpha_2 + \beta_2) = \alpha_1^2 + \beta_1^2.$$

Из последнего соотношения выражаем α_0 и тогда

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\alpha_1^2 + \beta_1^2}{b + \alpha_2 + \beta_2} x^2 + 2\alpha_1 x + \alpha_2, \\ \beta &= \frac{\alpha_1^2 + \beta_1^2}{b + \alpha_2 + \beta_2} y^2 + 2\beta_1 y + \beta_2. \end{aligned} \tag{16}$$

Далее находим f , интегрируя (9) при $g = (b + \theta)^{-1}$. Получим

$$f = c \ln(b + \theta) + c_1,$$

или, в силу (16),

$$f = c \ln \left(\frac{\alpha_1^2 + \beta_1^2}{b + \alpha_2 + \beta_2} (x^2 + y^2) + 2\alpha_1 x + 2\beta_1 y + \alpha_2 + \beta_2 + b \right) + c_1.$$

Обозначим $\alpha_2 + \beta_2 + b = \bar{b}$, тогда

$$f = c \ln \left((\alpha_1^2 + \beta_1^2)(x^2 + y^2) + 2\alpha_1 \bar{b} x + 2\beta_1 \bar{b} y + \bar{b}^2 \right) + \bar{c}.$$

Положим $\alpha_1 = d \cos \varphi$ и $\beta_1 = d \sin \varphi$. Тогда

$$f = c \ln \left(d^2(x^2 + y^2) + 2d\bar{b}x \cos \varphi + 2d\bar{b}y \sin \varphi + \bar{b}^2 \right) + \bar{c}.$$

или

$$f = c \ln \left(x^2 + y^2 + 2\tilde{b}x \cos \varphi + 2\tilde{b}y \sin \varphi + \tilde{b}^2 \right) + \tilde{c}.$$

Окончательно получаем:

$$f = c \ln \left((x + \tilde{b} \cos \varphi)^2 + (y + \tilde{b} \sin \varphi)^2 \right) + \tilde{c}. \tag{17}$$

Таким образом, доказана

Теорема 2. *Криволинейная три-ткань, определяемая гармонической функцией, является регулярной тогда и только тогда, когда эта функция имеет вид (14) или (17).*

5. Рассмотрим уравнение теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx}. \quad (18)$$

Как и выше, будем искать решения вида (2):

$$u = f(\alpha(x) + \beta(t)). \quad (2')$$

Для них уравнение (18) примет вид:

$$f' \beta' = a^2 (f''(\alpha')^2 + f' \alpha'')$$

или

$$\beta'(t) = a^2 \left(\frac{f''}{f'}(\theta)(\alpha'(x))^2 + \alpha''(x) \right). \quad (19)$$

Продифференцируем это уравнение по x , затем по t . Так как $\alpha' \neq 0$ и $\beta' \neq 0$, получим

$$\left(\frac{f''}{f'} \right)'' (\alpha'(x))^2 + 2 \left(\frac{f''}{f'} \right)' \alpha'' = 0$$

или

$$\frac{g'(\theta)}{g(\theta)} + 2 \frac{\alpha''(x)}{(\alpha'(x))^2} = 0, \quad (20)$$

где обозначено

$$g = \left(\frac{f''}{f'} \right)'. \quad (21)$$

Поскольку слагаемые в уравнении (20) зависят от разных аргументов, то они являются постоянными:

$$\frac{g'(\theta)}{g(\theta)} = c, \quad 2 \frac{\alpha''(x)}{(\alpha'(x))^2} = -c.$$

Интегрируя, получим:

$$g = \left(\frac{f''}{f'} \right)' = c_1 e^{c\theta}, \quad (22)$$

откуда

$$\frac{f''}{f'} = \bar{c}_1 e^{c\theta} + c_2, \quad (23)$$

где $\bar{c}_1 = c_1 c^{-1}$, и

$$\alpha'(x) = \left(\frac{c}{2} x + c_3 \right)^{-1}, \quad (24)$$

что дает

$$\alpha(x) = 2c^{-1} \ln \left(p \left(\frac{c}{2} x + c_3 \right) \right), \quad (25)$$

где c_3 и p — постоянные.

С учетом (23)-(25) уравнение (19) примет вид:

$$\beta'(t) = a^2 p^2 \bar{c}_1 e^{c\beta(t)} + a^2 \frac{c_2 - \frac{c}{2}}{(\frac{c}{2}x + c_3)^2}. \quad (26)$$

Правая часть не зависит от x при условии

$$c_2 - \frac{c}{2} = 0, \quad (27)$$

при котором уравнение (26) принимает вид:

$$\beta'(t) = p^2 a^2 \bar{c}_1 e^{c\beta(t)}.$$

Интегрируя, находим:

$$\beta(t) = -c^{-1} \ln(-p^2 a^2 c_1 t + c_5). \quad (28)$$

Чтобы найти f следует проинтегрировать (23). В результате получим:

$$\ln f' = \frac{\bar{c}_1}{c} e^{c\theta} + c_2 \theta + c_4.$$

Отсюда, с учетом (26),

$$f' = \bar{c}_4 e^{\frac{c}{2}\theta} e^{\frac{\bar{c}_1}{c} e^{c\theta}}, \quad \bar{c}_4 = e^{c_4},$$

и, следовательно,

$$f = \bar{c}_4 \int e^{\frac{c}{2}\theta} e^{\frac{\bar{c}_1}{c} e^{c\theta}} d\theta = \frac{2\bar{c}_4}{c} \int e^{\frac{\bar{c}_1}{c} z^2} dz,$$

где обозначено $z = e^{\frac{c}{2}\theta}$. С учетом (25) и (27) находим:

$$\begin{aligned} z &= e^{\frac{c}{2}\theta} = e^{\frac{c}{2}(\alpha+\beta)} = \\ &= p \left(\frac{c}{2}x + c_3 \right) (-p^2 a^2 c_1 t + c_5)^{-\frac{1}{2}} = \\ &= \left(\frac{c}{2}x + c_3 \right) (-a^2 c_1 t + \bar{c}_5)^{-\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

где $\bar{c}_5 = c_5 p^{-2}$. Переобозначив постоянные:

$$\frac{c}{2} = b, \quad \frac{\bar{c}_1}{c} = b_1, \quad c_3 = b_3, \quad \frac{2\bar{c}_4}{c} = b_2, \quad \bar{c}_5 = b_4,$$

приходим к следующему утверждению.

Теорема 3. *Криволинейная три-ткань, определенная уравнением теплопроводности (18), является регулярной тогда и только тогда, когда функция u имеет вид*

$$u = b_2 \int e^{b_1 z^2} dz,$$

где

$$z = (bx + b_3)(-4a^2 b^2 b_1 t + b_4)^{-\frac{1}{2}}.$$

6. Рассмотрим уравнение колебания

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}. \quad (29)$$

Как и в предыдущих случаях, ищем решения вида (2), определяющие регулярную три-ткань. Рассуждая как в п. 4 для уравнения Лапласа, придем к следующему утверждению.

Теорема 4. *Криволинейная три-ткань, определяемая решением уравнения (29), является регулярной тогда и только тогда, когда функция u имеет вид*

$$u = c \ln (\cosh(\alpha_0 + px) + \cosh(\beta_0 + apt)) + \bar{c}.$$

или

$$u = c \ln \left((x + \tilde{b} \cosh \varphi)^2 - (at - \tilde{b} \sinh \varphi)^2 \right) + \bar{c}.$$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] В. Бляшке. *Введение в геометрию тканей*. Гос. издат. Физ.-мат. лит., 1959.
- [2] А. А. Уткин, М. А. Шелехов. О три-тканях, определяемых линейным дифференциальным уравнением первого порядка. *Изв. вузов. Матем.*, 11(474):54–57, 2001.
- [3] А. А. Уткин, М. А. Шелехов. Три-ткани, определяемые уравнением Риккати. *Изв. вузов. Матем.*, 11(510):87–90, 2004.
- [4] А. М. Шелехов, В. Б. Лазарева, Уткин А. А. *Криволинейные три-ткани*. Тверь, 2013, 237 с.

Поступила в редакцию 28 июля 2017, принята к печати 10 августа 2017.

Александр Михайлович Шелехов

Россия, Тверь, ул. 15 лет Октября, 13, кв. 153

Email: amshelkhov@rambler.ru

Посвящается 100-летию со дня рождения проф. Б. А. Розенфельда

Объем конечного ортогонального h -конуса в гиперболическом пространстве положительной кривизны

Л. Н. Ромакина

Abstract. The hyperbolic space \widehat{H}^3 of positive curvature is considered in the projective Cayley-Klein model, on the ideal domain of the Lobachevskii space. The basic notions of the volumes theory of the space \widehat{H}^3 are introduced through invariants of the fundamental group of the space. In the orthogonal curvilinear coordinate system the volume element is found, the volume formulae for a finite orthogonal h -cone and bodies bounded by such cone and the sphere with centre at the vertex of this cone, are obtained.

Аннотация. Гиперболическое пространство \widehat{H}^3 положительной кривизны рассмотрено в проективной модели Кэли-Клейна, на идеальной области пространства Лобачевского. Введены основные понятия теории объемов пространства \widehat{H}^3 через инварианты фундаментальной группы пространства. В ортогональной криволинейной системе координат найден элемент объема, получены формулы объема для конечного ортогонального h -конуса и тел, ограниченных таким конусом и сферой с центром в вершине этого конуса.

2010 Mathematics Subject Classification: 51F10, 51M25

УДК 514.133

Ключевые слова: гиперболическое пространство положительной кривизны, объем ортогонального h -конуса, объем ортогональной h -пирамиды

DOI: <http://dx.doi.org/10.15673/tmgc.v10i2.654>

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Гиперболическое пространство положительной кривизны. Гиперболическое пространство \widehat{H}^3 положительной кривизны [14, с. 210] может быть реализовано на гиперсфере вещественного радиуса с отождествленными диаметрально противоположными точками в псевдоевклидовом пространстве \mathbb{R}_1^4 . Но больший интерес, на наш взгляд, представляет интерпретация пространства \widehat{H}^3 в проективной схеме Кэли-Клейна, поскольку она может быть использована для описания взаимодействия атомных частиц [24]. В проективной модели пространство \widehat{H}^3 реализовано на идеальной области пространства Лобачевского Λ^3 . Пространства \widehat{H}^3 и Λ^3 являются связными компонентами расширенного гиперболического пространства \mathbb{H}^3 , т. е. проективного пространства \mathbb{P}^3 с фиксированной в нем овальной поверхностью, которую считают бесконечно удаленной и называют *абсолютом* пространств \widehat{H}^3 , Λ^3 и \mathbb{H}^3 [14], [18, с. 73]. Напомним, что *овальной поверхностью* пространства \mathbb{P}^3 называют невырожденную поверхность второго порядка сигнатуры 2 [10, §136]. Пространство Лобачевского реализуется на внутренней, а пространство \widehat{H}^3 — на внешней области пространства \mathbb{H}^3 относительно абсолюта. Группа G проективных автоморфизмов абсолюта является *фундаментальной группой* преобразований пространств \widehat{H}^3 , Λ^3 и \mathbb{H}^3 .

Каждая прямая пространства \mathbb{H}^3 в зависимости от количества и природы общих с абсолютом точек может быть отнесена к одному из трех типов. *Эллиптические (гиперболические) прямые* пересекают абсолют в двух мнимо сопряженных (вещественных) точках. *Параболические прямые* касаются абсолюта и являются изотропными. Тип прямой пространства \widehat{H}^3 определен типом содержащей ее прямой пространства \mathbb{H}^3 . С каждой собственной точкой пространства \widehat{H}^3 связан конус вещественных изотропных образующих с вершиной в этой точке, названный *изотропным* или *световым конусом* данной точки [23, раздел 3]. Каждая эллиптическая (гиперболическая) прямая, проходящая через собственную точку пространства \widehat{H}^3 , принадлежит внешней (внутренней) области относительно светового конуса данной точки.

В зависимости от типа линии пересечения плоскости с абсолютом различают три типа плоскостей пространства \mathbb{H}^3 (см. [23, раздел 1], [6]). *Эллиптические плоскости* пересекают абсолютную поверхность по нулевой линии (см. [10, §134]), т. е. по невырожденной линии второго порядка сигнатуры 0. *Расширенные гиперболические плоскости* имеют с абсолютом общую овальную линию (см. [10, §134]) и состоят из двух компонент. Внешняя относительно абсолюта компонента,

собственная для пространства \hat{H}^3 , является *гиперболической плоскостью положительной кривизны* (см., например, [18], [19]), внутренняя компонента — *плоскостью Лобачевского*. Коевклидовы плоскости (см., например, [15], [16]) пересекают абсолют по вырожденной линии второго порядка — паре мнимо сопряженных прямых. Тип плоскости пространства \hat{H}^3 определен типом содержащей ее плоскости пространства \mathbb{H}^3 .

Все двугранные углы пространства \hat{H}^3 как и все углы гиперболической плоскости \hat{H} положительной кривизны образуют 15 типов, углы шести типов измеримы с помощью абсолюта, углы трех типов имеют вещественные меры (см. [17], [18], [6]). Каждый угол коевклидовой плоскости принадлежит одному из четырех типов, для углов между параболическими прямыми такой плоскости существует инвариант фундаментальной группы преобразований, а для конечных углов между эллиптическими прямыми существует инвариант группы движений. Фундаментальная группа преобразований коевклидовой плоскости на множестве пар эллиптических прямых транзитивна (см. [16]).

1.2. Постановка задачи. Теория объемов в пространстве Лобачевского с первых своих шагов обогащала математику новыми результатами и новыми методами. Она имеет давнюю историю и остается актуальной на современном этапе (см., например, [13], [12], [9], [28], [8], [26], [1], [2], [3], [4], [7]). Значительные трудности вычисления объемов многогранников в пространстве Лобачевского на протяжении двух веков поддерживают дух состязательности среди ученых, укрепляя их в стремлении получить наиболее компактные формулы объемов. Но само пространство будто подшучивает над исследователями, оставляя в лидерах первопроходцев и стимулируя тем самым их последователей к выходу на свою идеальную область.

В поисках аналогов простых формул объема из евклидовой и эллиптической геометрий, например, формулы $V = \frac{1}{6}abc$ объема евклидова тетраэдра с исходящими из одной вершины попарно ортогональными ребрами или формулы $V = \frac{1}{2}AD$ объема эллиптического тетраэдра с четырьмя прямыми двугранными углами (см., например, [8]), исследователь непременно задается вопросом об особенностях строения пространства Лобачевского, затрудняющих получение таких формул. Довольно простое объяснение этого вопроса дает проективная модель данного пространства.

Упрощение вычислений при выводе метрических формул достигается, как правило, использованием ортогональных систем координат, а сами метрические соотношения имеют более компактную запись, если содержащиеся в них величины характеризуют взаимно ортогональные

объекты. В проективном смысле ортогональность объектов связана с понятием абсолютного поляритета. К примеру, ортогональность двух прямых на плоскости Лобачевского равносильна тому, что каждая из этих прямых проходит через полюс другой относительно абсолюта.

Приведенная компактная формула объема эллиптического тетраэдра характеризует тетраэдр, два противоположных ребра которого лежат на взаимно полярных относительно абсолюта прямых. Назовем такой тетраэдр *монополярным*, применяя термин, введенный в работе [26] для тетраэдра с аналогичным свойством в пространстве \widehat{H}^3 . Ребра монополярного тетраэдра на взаимно полярных относительно абсолюта прямых назовем *базисными*. Если их длины равны a и b , то объем монополярного тетраэдра может быть вычислен по формуле $V = \frac{1}{2}\rho ab$, где ρ — радиус кривизны пространства, эллиптического \mathbb{E}^3 или гиперболического пространства \widehat{H}^3 положительной кривизны (см. [26]).

В отличие от пространств \mathbb{E}^3 и \widehat{H}^3 , пространство Лобачевского, реализуясь внутри овальной поверхности проективного пространства, не содержит взаимно полярных относительно абсолюта прямых. Каждая прямая пространства Лобачевского принадлежит гиперболической прямой пространства \mathbb{H}^3 . Абсолютная полярная такой прямой расположена за пределами пространства Λ^3 , является эллиптической. Изучая конечные объекты в пространстве Лобачевского и используя объекты и системы координат в его собственной области, задействовать эллиптические прямые не удастся, следовательно не удастся максимально упростить вычисления и результирующие формулы.

Ситуация меняется принципиально после распространения исследований на идеальную область пространства Λ^3 . Выход за пределы абсолюта, с одной стороны, значительно обогащает гиперболическую геометрию, а с другой — позволяет существенно упростить решение некоторых задач. В данной работе представлен пример одной из таких задач — вычисление в пространстве \widehat{H}^3 объемов конечного ортогонального h -конуса и тел, полученных его рассечением эллиптической сферой.

Прежде чем приступить к решению поставленной задачи, по схеме, предложенной в работах [21], [25], [26], определим основные понятия теории объемов пространства \widehat{H}^3 в проективной модели Кэли-Клейна и введем ортогональную криволинейную систему координат с базовой расширенной гиперболической плоскостью, определенную на внешней области относительно светового конуса своего полюса. Применяя введенную систему, установим зависимость объема конечного ортогонального h -конуса от площади его основания. Как следствия полученной зависимости найдем формулы объема конечной ортогональной пирамиды с гиперболическим основанием.

1.3. Основные метрические формулы. Все вычисления в пространстве \widehat{H}^3 проводим в каноническом репере $R^* = \{A_1, A_2, A_3, A_4, E\}$ первого типа, вершины которого попарно сопряжены относительно абсолюта, вершина A_4 является внутренней по отношению к абсолюту, а единичная точка E служит пересечением трех коевклидовых плоскостей, каждая из которых содержит одну из координатных прямых A_1A_2, A_1A_3, A_2A_3 . Семейство всех канонических реперов первого типа в пространстве \widehat{H}^3 зависит от шести параметров. Уравнение абсолютной поверхности γ в каждом репере этого семейства имеет вид

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 0.$$

Квадратичная форма $\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$ является метрической формой в пространстве \widehat{H}^3 . Для собственной (идеальной) точки A пространства \widehat{H}^3 с координатами (a_p) , $p = 1, 2, 3, 4$, в репере R^* справедливо неравенство

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - a_4^2 > 0 \quad (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - a_4^2 < 0). \quad (1.1)$$

Если точки A и B эллиптической (гиперболической) прямой заданы в репере R^* координатами соответственно (a_p) и (b_p) , $p = 1, 2, 3, 4$, то расстояние между ними может быть выражено по формуле

$$\cos \frac{|AB|}{\rho} = \pm \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 - a_4b_4}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - a_4^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - b_4^2}}, \quad (1.2)$$

$$\left(\cosh \frac{|AB|}{\rho} = \pm \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 - a_4b_4}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - a_4^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - b_4^2}} \right) \quad (1.3)$$

где ρ — радиус кривизны пространства \widehat{H}^3 , $\rho \in \mathbb{R}_+$.

Билинейная форма $\overline{\varphi}$, полярная к форме φ , определяет условие ортогональности точек A и B в репере R^* :

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 - a_4b_4 = 0. \quad (1.4)$$

Тангенциальная метрическая форма пространства \widehat{H}^3 в репере R^* совпадает с формой φ . Для координат (α_p) , $p = 1, 2, 3, 4$, расширенной гиперболической (эллиптической) плоскости α пространства \widehat{H}^3 в репере R^* выполняется неравенство

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 - \alpha_4^2 > 0, \quad (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 - \alpha_4^2 < 0). \quad (1.5)$$

При вычислении в п. 4.2 объемов ортогональных h -пирамид пространства \widehat{H}^3 потребуются следующие две теоремы, доказательства которых можно найти в работах [5, теорема 3.1] и [21, теорема 3] соответственно.

Теорема 1. Пусть на гиперболической плоскости \widehat{H} радиуса кривизны ρ , $\rho \in \mathbb{R}_+$, меры внутренних углов при вершинах A_1, A_2, \dots, A_n конечного n -реберника F без параболических ребер равны соответственно $\widehat{A}_1, \widehat{A}_2, \dots, \widehat{A}_n$. Тогда площадь S n -реберника F может быть вычислена по формуле

$$S = \rho^2 \left(\sum_{j=1}^n \widehat{A}_j - i\pi(n-2) \right).$$

Теорема 2. На гиперболической плоскости \widehat{H} радиуса кривизны ρ , $\rho \in \mathbb{R}_+$, площадь S прямоугольного трехреберника с эллиптическим (гиперболическим) катетом длиной a (b) может быть вычислена по формуле

$$S = \rho^2 \ln \frac{\sinh \frac{b}{\rho} + \cosh \frac{b}{\rho} \sin \frac{a}{\rho}}{\sin \frac{a}{\rho} + \cos \frac{a}{\rho} \sinh \frac{b}{\rho}}.$$

2. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ОБЪЕМОВ ПРОСТРАНСТВА \widehat{H}^3

По схеме из работ [21], [25], [26] определим в пространстве \widehat{H}^3 понятие объема тела через инварианты фундаментальной группы G .

2.1. Собственные координаты точек в пространстве \widehat{H}^3 . Проективные координаты точек пространства \widehat{H}^3 определены с точностью до общего ненулевого множителя. Чтобы обеспечить однозначность вводимых понятий, проведем нормировку проективных координат точек, инвариантную относительно действий группы G .

Предположим, что в репере R^* вещественные числа (x_p) , $p = 1, 2, 3, 4$, служат координатами собственной точки M пространства \widehat{H}^3 радиуса кривизны ρ , $\rho \in \mathbb{R}_+$. Тогда четверку чисел

$$\bar{x}_p = \pm \frac{\rho x_p}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2}}, \quad (2.1)$$

определенных с точностью до знака, назовем *собственными координатами* точки M в репере R^* .

На основании условий (1.1) собственным (идеальным) точкам пространства \widehat{H}^3 в нормировке (2.1) соответствуют определенные с точностью до знака четверки вещественных (мнимых) чисел, а точкам абсолюта — четверки бесконечно больших величин.

Собственные координаты собственных точек пространства \widehat{H}^3 удовлетворяют равенству

$$\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 + \bar{x}_3^2 - \bar{x}_4^2 = \rho^2. \quad (2.2)$$

2.2. **Элемент объема пространства \widehat{H}^3 .** Рассмотрим в пространстве \widehat{H}^3 область Q , гомеоморфную открытому шару (или, на языке проективной геометрии, внутренности овальной поверхности проективного пространства \mathbb{P}^3). Пусть в репере R^* произвольная точка M из области Q имеет собственные координаты (\bar{x}_p) . Зададим на области Q криволинейную систему координат C^* гладкими функциями:

$$\bar{x}_p = \bar{x}_p(u, v, w), \quad p = 1, 2, 3, 4, \quad (u, v, w) \in \bar{Q} \subset \mathbb{R}^3.$$

Репер R^* будем называть *присоединенным* к системе C^* .

Условимся, что любые две координатные кривые в каждом семействе u , v , или w системы C^* принадлежат одному непараболическому типу кривых, определенному типом касательной к кривой в каждой ее точке (см. [25, раздел 3]). Систему C^* назовем *ортогональной*, если в каждой точке области Q координатные кривые попарно взаимно ортогональны.

Согласно условиям (1.4) и (2.2) точки

$$M_u \left(\frac{\partial \bar{x}_p}{\partial u} \right), \quad M_v \left(\frac{\partial \bar{x}_p}{\partial v} \right), \quad M_w \left(\frac{\partial \bar{x}_p}{\partial w} \right) \quad (2.3)$$

ортогональны в точке M . Поэтому плоскость $M_u M_v M_w$ — полярная плоскость точки M относительно абсолюта.

Для значений форм $\bar{\varphi}$ и φ от координат точек (2.3) введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \gamma_{uv} &= \bar{\varphi} \left(\frac{\partial \bar{x}_p}{\partial u}, \frac{\partial \bar{x}_p}{\partial v} \right), & \gamma_{vw} &= \bar{\varphi} \left(\frac{\partial \bar{x}_p}{\partial v}, \frac{\partial \bar{x}_p}{\partial w} \right), & \gamma_{uw} &= \bar{\varphi} \left(\frac{\partial \bar{x}_p}{\partial u}, \frac{\partial \bar{x}_p}{\partial w} \right) \\ \gamma_{uu} &= \varphi \left(\frac{\partial \bar{x}_p}{\partial u} \right), & \gamma_{vv} &= \varphi \left(\frac{\partial \bar{x}_p}{\partial v} \right), & \gamma_{ww} &= \varphi \left(\frac{\partial \bar{x}_p}{\partial w} \right). \end{aligned}$$

В системе C^* прямые MM_u , MM_v и MM_w являются касательными к координатным линиям u , v и, соответственно, w в точке M . Следовательно, ортогональность системы C^* равносильна системе условий:

$$\gamma_{uv} = \gamma_{vw} = \gamma_{uw} = 0.$$

Непосредственная проверка показывает, что для числа

$$J = \begin{vmatrix} \gamma_{uu} & \gamma_{uv} & \gamma_{uw} \\ \gamma_{uv} & \gamma_{vv} & \gamma_{vw} \\ \gamma_{uw} & \gamma_{vw} & \gamma_{ww} \end{vmatrix}$$

справедливо равенство $J = -\Phi$, где Φ — значение метрической формы φ от координат плоскости $M_u M_v M_w$ в репере R^* . Следовательно, число J — инвариант группы G , характеризующий сопровождающий четырехвершинник $MM_u M_v M_w$ точки M . Поскольку M — собственная точка пространства \widehat{H}^3 , ее абсолютная полярная плоскость $M_u M_v M_w$

является расширенной гиперболической. Согласно условию (1.5) для плоскости $M_u M_v M_w$ справедливо неравенство $\Phi > 0$. Таким образом, для каждой точки M области Q пространства \widehat{H}^3 выполняется неравенство $J < 0$. При измерении объемов конечных тел мы стремимся использовать вещественные положительные числа, поэтому в качестве *элемента объема* пространства \widehat{H}^3 примем число

$$dV = \sqrt{-J} du dv dw, \quad (2.4)$$

учитывая, что число $\sqrt{J} du dv dw$ является элементом объема в пространстве Лобачевского.

2.3. Формула объема тела в пространстве \widehat{H}^3 . Зададим в области Q пространства \widehat{H}^3 конечное тело F , гомеоморфное замыканию внутренности овальной поверхности пространства \mathbb{P}^3 . Условимся, что числовая область \overline{F} , где $\overline{F} \subset \overline{Q} \subset \mathbb{R}^3$, определяет тело F в координатной системе C^* на области Q . Тогда согласно формуле (2.4) объем V тела F может быть выражен по формуле

$$V = \iiint_{\overline{F}} \sqrt{-J} du dv dw. \quad (2.5)$$

Заметим, что при вычислении по формуле (2.5) объемов конечных тел пространства Λ^3 будем получать вещественные отрицательные значения. Этот факт особенно важен при измерении объемов тел, принадлежащих частично каждому из пространств \widehat{H}^3 и Λ^3 . Скоординировать вычисления объемов таких тел можно с помощью формулы

$$V_{\Lambda^3}(F) = -V_{\widehat{H}^3}(F),$$

где через $V_{\Lambda^3}(F)$ и $V_{\widehat{H}^3}(F)$ обозначен объем тела F пространства \mathbb{H}^3 , вычисленный в геометрии пространства Λ^3 и \widehat{H}^3 соответственно. Доказательство этой формулы мы не приводим, поскольку в данной работе все вычисления проводим для конечных тел пространства \widehat{H}^3 .

3. ОРТОГОНАЛЬНАЯ КРИВОЛИНЕЙНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ $C_{2,E}$

3.1. Построение. Выберем в пространстве \widehat{H}^3 произвольный канонический репер $R^* = \{A_1, A_2, A_3, A_4, E\}$ первого типа, его координатную плоскость $A_1 A_2 A_4$ обозначим α . Вершина A_4 репера R^* расположена внутри абсолюта, поэтому α — расширенная гиперболическая плоскость. Пусть E_3 — ортогональная проекция точки E на плоскость α : $E_3 = A_3 E \cap \alpha$, (Рис. 3.1). Прямой квазиугол (см. [18, п. 4.3.4]) плоскости α между прямыми $A_1 A_2$ и $A_1 A_4$, содержащий точку E_3 , обозначим β_1 . Прямую полуплоскость (см. там же) между прямыми $A_1 A_4$ и $A_2 A_4$,

содержащую E_3 , обозначим β_2 . Пусть ξ — прямой двугранный квазиугол (см. [6]) между плоскостями α и $A_1A_2A_3$, содержащий точку E .

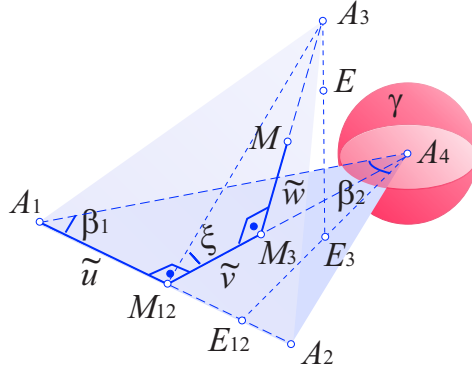


Рис. 3.1. Абсолют γ , система координат $C_{2,E}$

Набор фигур $\{A_1, A_1A_2, \alpha, \beta_1, \beta_2, \xi\}$ назовем *эллиптической системой координат второго рода* и обозначим $C_{2,E}$. Точку A_1 , прямую A_1A_2 и плоскость α назовем соответственно *началом*, *осью* и *базой* системы координат $C_{2,E}$. Точку A_3 назовем *поллюсом*, углы β_1, β_2, ξ — *координатными углами* этой системы.

Для произвольной точки M , лежащей во внешней области пространства \hat{H}^3 относительно светового конуса точки A_3 , введем следующие обозначения:

- M_3 — ортогональная проекция точки M на плоскость α :

$$M_3 = A_3M \cap \alpha;$$

- M_{12} — ортогональная проекция в плоскости α точки M_3 на прямую A_1A_2 :

$$M_{12} = A_4M_3 \cap A_1A_2;$$

- \tilde{u} — эллиптический отрезок между точками A_1, M_{12} , полностью или большей своей частью принадлежащий полуплоскости β_2 ;
- \tilde{v} — гиперболический отрезок между точками M_3, M_{12} ;
- \tilde{w} — эллиптический отрезок между точками M, M_3 , полностью или большей своей частью принадлежащий двугранному квазиуглу ξ .

Координатами точки M в системе $C_{2,E}$ назовем тройку чисел

$$u = \frac{|\tilde{u}|}{\rho}, \quad v = \varepsilon \frac{|\tilde{v}|}{\rho}, \quad w = \frac{|\tilde{w}|}{\rho}, \quad (3.1)$$

где $\varepsilon = 1$ ($\varepsilon = -1$), если точка M_3 принадлежит (не принадлежит) квазиуглу β_1 . Координаты (u, v, w) точки M удовлетворяют условия:

$$u \in [0, \pi), \quad v \in \mathbb{R}, \quad w \in [0, \pi).$$

3.2. Связь между криволинейными и собственными координатами точки. Приведем вывод формул параметризации области Q в системе координат $C_{2,E}$, представленных в тезисах [27].

Пусть точка M , принадлежащая внешней области пространства \widehat{H}^3 относительно светового конуса точки A_3 , задана в системе $C_{2,E}$ координатами (u, v, w) . В репере $R^* = \{A_1, A_2, A_3, A_4, E\}$, присоединенном к системе $C_{2,E}$, точку M зададим проективными координатами $(x_1 : x_2 : x_3 : x_4)$ и соответствующими им по формулам (2.1) собственными координатами $(\bar{x}_1 : \bar{x}_2 : \bar{x}_3 : \bar{x}_4)$. Тогда проективные координаты точек M_3 и M_{12} в репере R^* можно записать в виде $(x_1 : x_2 : 0 : x_4)$ и $(x_1 : x_2 : 0 : 0)$ соответственно.

По формулам (1.2), (1.3) выразим длины отрезков \tilde{u} , \tilde{v} и \tilde{w} через координаты точек A_1, M, M_3, M_{12} . С учетом обозначений (3.1) получаем:

$$\begin{aligned} \cos u &= \pm \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, & \cosh v &= \pm \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 - x_4^2}}, \\ \cos w &= \pm \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 - x_4^2}}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2}}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Из выражений (3.2) находим зависимости между проективными координатами точки M :

$$\begin{aligned} x_2^2 &= x_1^2 \frac{\sin^2 u}{\cos^2 u}, & x_4^2 &= x_1^2 \frac{\sinh^2 v}{\cos^2 u \cosh^2 v}, \\ x_3^2 &= x_1^2 \frac{\sin^2 w}{\cos^2 u \cosh^2 v \cos^2 w}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Очевидно, что в репере R^* условия (3.3) выполняются и для собственных координат (\bar{x}_p) точки M , определенных равенствами (2.1). Кроме того, собственные координаты подчинены условию (2.2).

Из системы требований (2.2), (3.3) находим выражения собственных координат точки M в репере R^* через ее криволинейные координаты в системе $C_{2,E}$:

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= \rho \cos u \cosh v \cos w, & \bar{x}_2 &= \rho \sin u \cosh v \cos w, \\ \bar{x}_3 &= \rho \sin w, & \bar{x}_4 &= \rho \sinh v \cos w, \end{aligned} \tag{3.4}$$

где $u \in [0, \pi)$, $v \in \mathbb{R}$, $w \in [0, \pi)$.

3.3. Элемент объема пространства \widehat{H}^3 в системе $C_{2,E}$. Выражение элемента объема пространства \widehat{H}^3 в координатах системы $C_{2,E}$ представлено в тезисах [27], дадим его обоснование.

Пусть параметризация (3.4) определяет в репере R^* собственные координаты точки M из внешней относительно светового конуса точки A_3 области пространства \widehat{H}^3 . Тогда точки M_u , M_v и M_w в репере R^* заданы координатами:

$$M_u(-\rho \sin u \cosh v \cos w : \rho \cos u \cosh v \cos w : 0 : 0),$$

$$M_v(\rho \cos u \sinh v \cos w : \rho \sin u \sinh v \cos w : 0 : \rho \cosh v \cos w),$$

$$M_w(-\rho \cos u \cosh v \sin w : -\rho \sin u \cosh v \sin w : \rho \cos w : -\rho \sinh v \sin w).$$

Вычисляя в параметризации (3.4) значения форм φ и $\overline{\varphi}$ от координат точек M_u , M_v , M_w , получаем равенства

$$\gamma_{uu} = \rho^2 \cosh^2 v \cos^2 w, \quad \gamma_{vv} = -\rho^2 \cos^2 w, \quad \gamma_{ww} = \rho^2,$$

$$\gamma_{uv} = \gamma_{uw} = \gamma_{vw} = 0,$$

из которых следует, что система координат $C_{2,E}$ является ортогональной, а элемент объема пространства \widehat{H}^3 задан формулой

$$dV = \rho^3 \cosh v \cos^2 w \, du \, dv \, dw. \quad (3.5)$$

Учитывая формулу (3.5) и ограничения на область Q задания системы $C_{2,E}$, объем V тела F , заданного во внешней области относительно светового конуса точки A_3 областью \overline{F} , $\overline{F} \subset \overline{Q} \subset \mathbb{R}^3$, найдем по формуле

$$V = \rho^3 \iiint_{\overline{F}} \cosh v \cos^2 w \, du \, dv \, dw. \quad (3.6)$$

4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОБЪЕМОВ ТЕЛ ПРОСТРАНСТВА \widehat{H}^3 В СИСТЕМЕ $C_{2,E}$

4.1. Основные определения. Пусть α — расширенная гиперболическая плоскость пространства \mathbb{H}^3 , A — полюс плоскости α относительно абсолютной овальной поверхности γ . В собственной для пространства \widehat{H}^3 компоненте плоскости α зададим замкнутую двустороннюю линию σ . Линия σ разбивает α на две компоненты, одна из которых гомеоморфна диску (или, на языке проективной геометрии, внутренней области проективной плоскости \mathbb{P}^2 относительно овальной линии). Назовем эту компоненту *внутренностью* линии σ , ее замыкание обозначим σ_o и условимся, что σ_o не содержит точек абсолюта. Коническая поверхность с вершиной A и направляющей σ , образованная ортогональными

к плоскости α эллиптическими прямыми, разбивает пространство \widehat{H}^3 на две компоненты. Рассмотрим ту из этих компонент, которая не содержит абсолют γ . Плоскость α разбивает эту компоненту на две конгруэнтные части, замыкание каждой из них назовем *конечным ортогональным h -конусом с основанием σ_o и вершиной A* , указывая символом h тип плоскости основания конуса.

По определению каждая прямолинейная образующая конечного ортогонального h -конуса пространства \widehat{H}^3 равна половине эллиптической прямой, следовательно, ее длина равна $\pi\rho/2$ (см., например, [18, п. 4.4.1]), где ρ — радиус кривизны пространства \widehat{H}^3 .

Если, в частности, в данном определении область σ_o является n -реберником (см. [23, раздел 2]), т. е. двусторонним n -вершинником с ограниченной им областью плоскости, то ортогональный h -конус назовем *конечной ортогональной h -пирамидой*.

В пространстве \widehat{H}^3 существуют четыре типа сфер: *гиперсферы* с комплексными радиусами и центрами в идеальных точках; *эллиптические сферы* с вещественными эллиптическими радиусами и центрами в собственных точках пространства \widehat{H}^3 ; *гиперболические сферы* с вещественными гиперболическими радиусами и центрами в собственных точках; *орисферы* с центрами на абсолютe.

Гиперсферы, гиперболические сферы и орисферы проективно эквивалентны, они являются овальными поверхностями. Эллиптические сферы являются кольцевыми поверхностями, т. е. невырожденными поверхностями второго порядка сигнатуры 0 (см. [10, §136]), они сплошь покрыты прямолинейными образующими двух семейств. В евклидовом пространстве кольцевые поверхности представлены однополостными гиперболоидами и гиперболическими параболоидами. В пространстве \widehat{H}^3 радиуса кривизны ρ , $\rho \in \mathbb{R}_+$, эллиптические сферы могут быть определены метрически как множества точек этого пространства, удаленных от собственной точки, называемой *центром* сферы, на эллиптическое расстояние r , $r \in (0, \pi\rho/2)$, называемое *радиусом* сферы. Абсолютную полярную плоскость центра эллиптической сферы назовем *базой* этой сферы. Поскольку эллиптическое расстояние от собственной точки пространства \widehat{H}^3 до ее абсолютной полярной плоскости равно $\pi\rho/2$, эллиптическая сфера радиуса r является эквидистантной поверхностью *высоты* $\pi\rho/2 - r$.

Рассмотрим в пространстве \widehat{H}^3 конечный ортогональный h -конус F с основанием σ_o и вершиной A . Эллиптическая сфера с центром A

рассекает h -конус F на две связные компоненты. Ту компоненту, которая содержит основание σ_o (вершину A), назовем *сферическим h -бочонком* (сферическим h -сектором) h -конуса F . Высоту (радиус) секущей эллиптической сферы назовем *высотой* (радиусом) сферического h -бочонка (сферического h -сектора).

4.2. Объемы тел, ограниченных ортогональным h -конусом. Установим зависимость объема конечного ортогонального h -конуса пространства \widehat{H}^3 от площади его основания. Для этого рассмотрим конечный ортогональный h -конус F с вершиной A и основанием σ_o в плоскости α . Все прямолинейные образующие конуса F принадлежат внешней относительно светового конуса точки A области пространства \widehat{H}^3 . Выберем на этой области координатную систему $C_{2,E}$ с полюсом в точке A и базой α . Пусть область σ_o задана в системе $C_{2,E}$ числовой областью \overline{S} изменения параметров u, v . Полагая в формулах (3.4) $w = 0$, вычислим по схеме из работы [25] площадь S области σ_o :

$$S = \rho^2 \iint_{\overline{S}} \cosh v \, du \, dv. \quad (4.1)$$

Для области \overline{F}_k , определяющей в системе $C_{2,E}$ сферический h -бочонк F_k с основанием σ_o и высотой m , выполняются условия: $(u, v) \in \overline{S}$ и $w \in [0, m/\rho]$. По формулам (3.6) и (4.1) находим:

$$\begin{aligned} V(F_k) &= \rho^3 \iiint_{\overline{F}_k} \cosh v \cos^2 w \, du \, dv \, dw \\ &= \rho S \int_0^{m/\rho} \cos^2 w \, dw = \frac{\rho S}{4} \left(\frac{2m}{\rho} + \sin \frac{2m}{\rho} \right). \end{aligned} \quad (4.2)$$

По формуле (4.2) при $m = \pi\rho/2$ получим объем $V(F)$ ортогонального h -конуса. Объем сферического h -сектора F_s радиуса $r = \pi\rho/2 - m$ найдем по формуле $V(F_s) = V(F) - V(F_k)$.

Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 3. В пространстве \widehat{H}^3 радиуса кривизны ρ , $\rho \in \mathbb{R}_+$, объемы ортогонального h -конуса F , сферического h -бочонка F_k высотой m и сферического сектора F_s радиуса r могут быть вычислены соответственно по формулам

$$\begin{aligned} V(F) &= \frac{\pi\rho S}{4}, & V(F_k) &= \frac{\rho S}{4} \left(\frac{2m}{\rho} + \sin \frac{2m}{\rho} \right), \\ V(F_s) &= \frac{\rho S}{4} \left(\frac{2r}{\rho} - \sin \frac{2r}{\rho} \right), \end{aligned} \quad (4.3)$$

где S — площадь основания тела.

Первая формула из (4.3) позволяет, в частности, вычислить объем конечной ортогональной h -пирамиды пространства \widehat{H}^3 . Например, согласно теоремам 1, 2 справедлива следующая теорема.

Теорема 4. В гиперболическом пространстве \widehat{H}^3 радиуса кривизны ρ , $\rho \in \mathbb{R}_+$, объем V конечной ортогональной h -пирамиды с мерами $\widehat{A}_1, \dots, \widehat{A}_n$ плоских углов основания, не содержащего параболических ребер, может быть вычислен по формуле

$$V = \frac{\pi\rho^3}{4} \left(\sum_{j=1}^n \widehat{A}_j - i\pi(n-2) \right).$$

Если в основании конечной ортогональной h -пирамиды пространства \widehat{H}^3 лежит прямоугольный трехреберник с длиной a (b) эллиптического (гиперболического) катета, то ее объем V может быть вычислен по формуле

$$V = \frac{\pi\rho^3}{4} \ln \frac{\sinh \frac{b}{\rho} + \cosh \frac{b}{\rho} \sin \frac{a}{\rho}}{\sin \frac{a}{\rho} + \cos \frac{a}{\rho} \sinh \frac{b}{\rho}}.$$

При вычислении в пространстве \widehat{H}^3 объемов пирамид с гиперболическим основанием могут быть полезны формулы площадей n -реберников различных видов в гиперболической плоскости положительной кривизны из работ [11], [21], [20], [22].

5. БЛАГОДАРНОСТИ

Автор выражает благодарность проф. Макарову Виталию Сергеевичу за обсуждение работы и полезные советы, направленные на ее усовершенствование.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] J. Bolyai. *Appendix. The theory of space*. Budapest : Akadémiai Kiadó, 1987.
- [2] R. Kellerhals. On the volume of hyperbolic polyhedra. *Math. Ann.*, 285:541–569, 1989.
- [3] J. H. Lambert. *Die Theorie der Parallellinien*. Leipziger : Leipziger Magazin für Reine und Angewandte Mathematik, 1786.
- [4] J. Murakami, A. Ushijima. A volume formula for hyperbolic tetrahedral in terms of edge lengths. *Journal of Geometry*, 83(1-2):153–163, 2005.
- [5] L. N. Romakina. The area of a generalized polygon without parabolic edges of a hyperbolic plane of positive curvature. *Asian Journal of Mathematics and Computer*, 10(4):293–310, 2016.
- [6] L. N. Romakina. Dihedrons of a hyperbolic three-space of positive curvature. *International Electronic Journal of Geometry*, 9(2):50–58, 2016.

- [7] L. Schläfli. *Theorie der vielfachen Continuität. Gesammelte mathematische Abhandlungen*. Basel : Birkhauser, 1950.
- [8] Н. В. Абросимов. Об объемах многогранников в пространствах постоянной кривизны. *Вестник Кем. ун-та*, 3(1):7–13, 2011.
- [9] Э. Б. Винберг. Объемы неевклидовых многогранников. *Успехи мат. наук*, 48(2(290)):17–46, 1993.
- [10] Н. В. Ефимов. *Высшая геометрия*. М. : Наука, 1971.
- [11] В. А. Клычкова. Трипрямоугольник гиперболической плоскости положительной кривизны. *Современный взгляд на будущее науки: сб. ст. междунар. научно-практ. конф. (25 мая, 2016)*. Томск, pages 14–17, 2016.
- [12] Б. Л. Лаптев. Объем пирамиды в пространстве Лобачевского. *Учен. зап. Казан. ун-та*, 114(2):53–77, 1954.
- [13] Н. И. Лобачевский. Воображаемая геометрия. *Учен. зап. Казан. ун-та*, 1:3–88, 1835.
- [14] Б. А. Розенфельд. *Неевклидовы пространства*. М. : Наука, 1969.
- [15] Б. А. Розенфельд, М. П. Замаховский. *Геометрия групп Ли. Симметрические, параболические и периодические пространства*. М. : МЦНМО, 2003.
- [16] Л. Н. Ромакина. *Геометрии коевклидовой и копсевдоевклидовой плоскостей*. Саратов : Научная книга, 2008.
- [17] Л. Н. Ромакина. Аналоги формулы Лобачевского для угла параллельности на гиперболической плоскости положительной кривизны. *Сиб. электрон. матем. изв.*, 10:393–407, 2013.
- [18] Л. Н. Ромакина. *Геометрия гиперболической плоскости положительной кривизны: в 4 частях. Ч. 1: Тригонометрия*. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2013.
- [19] Л. Н. Ромакина. *Геометрия гиперболической плоскости положительной кривизны: в 4 частях. Ч. 2: Преобразования и простые разбиения*. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2013.
- [20] Л. Н. Ромакина. О площади эллиптического четырехугольника Саккери на гиперболической плоскости положительной кривизны. *Математика. Механика*, 15:66–69, 2013.
- [21] Л. Н. Ромакина. Теорема о площади прямоугольного трехреберника гиперболической плоскости положительной кривизны. *Дальневост. матем. журн.*, 13(1):127–147, 2013.
- [22] Л. Н. Ромакина. Аналоги формулы Герона для трехреберников типов $eee(i)$, $eee(iii)$ гиперболической плоскости положительной кривизны. *Математика. Механика*, 17:52–55, 2015.
- [23] Л. Н. Ромакина. Классификация тетраэдров с негиперболическими гранями в гиперболическом пространстве положительной кривизны. *Чебышевский сб.*, 16(2):208–221, 2015.
- [24] Л. Н. Ромакина. Развитие представлений о геометрии окружающего пространства. *Сборник научных работ X Междунар. научн. конф. Евразийского Научного Объединения*. М. : ЕНО, 1(10):18–21, 2015.
- [25] Л. Н. Ромакина. К теории площадей гиперболической плоскости положительной кривизны. *Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.)*, 99(113):139–154, 2016.
- [26] Л. Н. Ромакина. Объем монополярного тетраэдра в гиперболическом пространстве положительной кривизны. *Сборник научных работ XXVII Междунар. научн. конф. Евразийского Научного Объединения*. М. : ЕНО, 1(5(27)):27–30, 2017.
- [27] Л. Н. Ромакина. Элементы объема в гиперболическом пространстве положительной кривизны. *Algebraic and geometric methods of analysis: book of abstracts of*

International scientific conference (May 31 - June 5, 2017). Odessa, Ukraine, pages 135–136, 2017.

- [28] И. Х. Сабитов. Алгебраические методы решения многогранников. *Успехи мат. наук*, 66(3):445–505, 2011.

Поступила в редакцию 26 мая 2017, принята к печати 17 августа 2017.

Людмила Николаевна Ромакина

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ, РОССИЯ

Email: romakinaln@mail.ru

ORCID: orcid.org/0000-0002-3695-2076

Наукове видання

Праці міжнародного геометричного центру
2017, т. 10, № 2

Комп'ютерна верстка та підготовка оригінал-макету
С. І. Максименко

Друк: підприємець Голіней О. М.
м. Івано-Франківськ, вул. Галицька, 128
тел. (0342) 58 04 32, +38 (050) 540 30 64
папір офсетний, друк цифровий
формат 70x100/16, ум. друк. 3.95 арк.
Зам. № 87 від 11.09.2017, наклад 300 прим.

Contents

On colorings and isometries	1
I. Protasov	
Warped product semi-slant submanifolds in locally conformal Kaehler manifolds	8
K. Matsumoto	
Characterization of striped surfaces	24
S. Maksymenko, E. Polulyakh	
Властивості спряжених функцій у гіперкомплексному просторі	39
М. В. Стефанчук	
О “шестиугольных” решениях некоторых уравнений в частных производных	47
А. М. Шелехов	
Объем конечного ортогонального h-конуса в гиперболическом пространстве положительной кривизны	56
Л. Н. Ромакина	

