ISSN 2072-9812

PROCEEDINGS
of the
INTERNATIONAL GEOMETRY CENTER

Volume 3, No. 3, 2010

Праці міжнародного геометричного центру

Том.3, No. 3, 2010

Труды международного геометрического центра

Том.3, No. 3, 2010

Proceedings of the International Geometry Center

Vol. 3, No. 3, 2010

Журнал є науковим фаховим виданням України в галузі математичних наук (перелік № 1-05/3, Бюлетень ВАК України №4, 2010, 14.04.2010, ISSN 2072-9812)

Odessa-2010

Зміст

Интеграл Лейко для изопериметрических экстремалей поворота на поверхности вращения и интегрируемость геодезического потока на её сферическом касательном расслоении

ЛЕЙКО Святослав Григорьевич

(Данная статья печатается в авторской редакции после смерти Святослава Григорьевича Лейко)

Аннотация

Как известно, гамильтоновы уравнения составляют один из важнейших классов дифференциальных уравнений. В частности, уравнения этого вида возникают в задаче нахождения геодезических кривых на римановых многообразиях. При этом среди всех гамильтоновых систем случай вполне интегрируемых представляется крайне редко [1 - 4]. В настоящей работе рассмотрен геодезический поток на сферическом касательном расслоении двумерного риманового многообразия с метрикой Сасаки и показано, что если базисное многообразие локально изометрично поверхности вращения, то соответствующая потоку гамильтонова система вполне интегрируема по Лиувиллю. Отсюда, как следствие, находятся траектории потока в квадратурах.

Данное исследование возникло в связи с изучением автором вариационных задач для функционалов поворота кривых [5 - 9]. Выяснилось, что базисные траектории потока (т.е. проекции траекторий потока на базу) являются изопериметрическими экстремалями поворота и обладают тем самым определёнными экстремальными свойствами. Найденный нами для этих экстремалей интеграл (обобщающий интеграл Клеро для геодезических кривых) оказался как раз тем недостающим интегралом для полной

интегрируемости геодезического потока на сферическом касательном расслоении с метрикой Сасаки [11, 12] в случае, когда базисное многообразие локально изометрично поверхности вращения. Последнее обстоятельство аналогично тому, как классический интеграл Клеро приводит к полной интегрируемости геодезического потока на поверхности вращения [1, 2].

1. Изопериметрические экстремали поворота на двумерных римановых многообразиях

В римановом пространстве (M^n, g) рассмотрим функционал длины $l[\gamma] = \int\limits_{t_0}^{t_1}(g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j)^{0.5}dt$, и функционал абсолютного поворота $\theta[\gamma] = \int\limits_0^l k_g dl$. Здесь γ - некоторая параметризованная кривая, $\dot{x}^i \equiv \xi^i = \frac{d\dot{x}^i}{dl}$ - компоненты касательного вектора $\dot{\gamma}$, l - длина дуги на кривой γ, k_g - её первая кривизна Френе, а в случае двумерного пространства $n = 2$ это абсолютная геодезическая кривизна.

Рассмотрим для функционала поворота изопериметрическую вариационную задачу

$$\delta\theta = 0, l[\gamma] = \widehat{l} = const$$

с фиксированными концами

$$\gamma(t_0) = p_0, \gamma(t_1) = p_1.$$

Применением стандартного метода Эйлера-Лагранжа, мы получили, что решения указанной задачи в двумерном пространстве удовлетворяют уравнение

$$k_g = cK, \tag{1}$$

где c - изопериметрическая постоянная, зависящая от фиксированной длины $\widehat{l}$, K - гауссова кривизна пространства. Кроме того, в особом случае $K = 0$, решением задачи является всякая допустимая кривая (класса C^4 без точек распрямления). Кривые, удовлетворяющие уравнению (1), названы нами изопериметрическими экстремалями поворота (ИЭП) двумерного пространства (M^2, g) [6].

Отметим, что уравнение (1) ранее рассматривалось в исследованиях А.Пуанкаре в связи с изучением замкнутых геодезических кривых овальной поверхности, к которому сводилась астрономическая "задача о трех телах"[13, с.229]. Нами установлены экстремальные свойства изопериметрических экстремалей поворота и получены их дифференциальные уравнения в нормальной форме [8]. В случае, если пространство (M^2, g) реализовано на поверхности евклидового пространства, изопериметрическим экстремалям поворота дана механическая интерпретация [9].

На поверхностях вращения нами найден следующий интеграл

$$rsin\omega = ecsin\psi + c_1, e = \pm 1, c_1 = constc, \tag{2}$$

где ω - угол между экстремалью и меридианом в их общей точке, r - расстояние от этой точки до оси вращения, ψ - угол, образованный касательной к меридиану с осью вращения [8].

2. Геодезические кривые на сферическом касательном расслоении двумерного риманового многообразия с метрикой Сасаки

Метрика Сасаки впервые была рассмотрена на сферическом касательном расслоении единичных векторов T_1M^n, а затем П.Надь обобщил её на $T_\rho M^n$ - сферическое касательное расслоение векторов, квадрат длины которых равен постоянной $\rho > 0$ [10 - 12] .

Пусть (M^2, g) - двумерное риманово многообразие с метрикой

$$dl^2 = g_{ij}dx^i dx^j, i, j, ... = 1, 2.$$

Метрика Сасаки g^* касательного расслоении TM^2 в индуцированных координатах x^i, y^i

$$dt^2 = g_{ij}dx^i dx^j + g_{ij}Dy^i Dy^j, Dy^k = dy^k + \Gamma^k_{ij} y^i dx^j \tag{3}$$

ограничивается на сферическое касательное расслоение $T_\rho M^2$ равенством $g_{ij}y^i y^j = \rho$. Здесь $\Gamma^k_{ij}(x^1, x^2)$ - коэффициенты римановой связности (символы Кристоффеля) относительно метрики g.

Возьмем в координатной окрестности многообразия (M^2, g) полугеодезические координаты x^1, x^2. Тогда

$$dl^2 = (dx^1)^2 + G(x^1, x^2)(dx^2)^2,$$

$$\Gamma^1_{22} = -\frac{G_1}{2}, \Gamma^2_{12} = \frac{G_1}{2G}, \Gamma^2_{22} = \frac{G_2}{2G},$$

остальные символы Кристоффеля равны нулю и гауссова кривизна

$$K = -\frac{(\sqrt{G})_{11}}{G}.$$

В качестве третьей координаты x^3 на $T_\rho M^2$ возьмём угол между касательным вектором y^i и касательным вектором $\frac{\partial}{\partial x^1}$ к первой координатной линии в точке (x^1, x^2). В этом случае

$$y^1 = \sqrt{\rho} cos x^3, y^2 = \frac{\sqrt{\rho}}{\sqrt{G}} sin x^3.$$

В координатах (x^1, x^2, x^3) метрика Сасаки g^* на $T_\rho M^2$ в силу (3) приобретает вид

$dt^2 = g^*_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \alpha, \beta, ... = 1, 2, 3, (g^*_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & G + \rho((\sqrt{G})_1)^2 & \rho(\sqrt{G})_1 \\ 0 & \rho(\sqrt{G})_1 & \rho \end{pmatrix}.$

Отсюда находим компоненты взаимного метрического тензора $g^{*\alpha\beta}$

$$(g^{*\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & G^{-1} & -G^{-1}(\sqrt{G})_1 \\ 0 & -G^{-1}(\sqrt{G})_1 & \rho^{-1} + G^{-1}((\sqrt{G})_1)^2 \end{pmatrix}$$

и символы Кристоффеля первого и второго рода

$$\Gamma^*_{12,3} = \Gamma^*_{13,2} = -\Gamma^*_{23,1} = \frac{1}{2}\frac{\partial g^*_{23}}{\partial x^1}, \Gamma^*_{12,2} = -\Gamma^*_{22,1} = \frac{1}{2}\frac{\partial g^*_{22}}{\partial x^1},$$
$$\Gamma^*_{22,2} = \frac{1}{2}\frac{\partial g^*_{22}}{\partial x^2}, \Gamma^*_{22,3} = \frac{1}{2}\frac{\partial g^*_{23}}{\partial x^2},$$

(остальные - нули);

$$\Gamma^{*1}_{\alpha\beta} = g^{*1\gamma}\Gamma^*_{\alpha\beta,\gamma} = \Gamma^*_{\alpha\beta,1}, \Gamma^{*2}_{\alpha\beta} = g^{*2\gamma}\Gamma^*_{\alpha\beta,\gamma} = G^{-1}\Gamma^*_{\alpha\beta,2} - G^{-1}(\sqrt{G})_1\Gamma^*_{\alpha\beta,3},$$
$$\Gamma^{*3}_{\alpha\beta} = g^{*3\gamma}\Gamma^*_{\alpha\beta,\gamma} = -G^{-1}(\sqrt{G})_1\Gamma^*_{\alpha\beta,2} + \left[\rho^{-1} + G^{-1}((\sqrt{G})_1)^2\right]\Gamma^*_{\alpha\beta,3}.$$

Относительно введенных координат x^α элемент поворота $d\theta$ и абсолютная геодезическая кривизна $k_g(l)$ базисной кривой $x^i(l)$ приобретают вид

$$d\theta = dx^3 + (\sqrt{G})_1 dx^2,$$
$$k_g = e\frac{d\theta}{dl} = e\left(\frac{dx^3}{dl} + (\sqrt{G})_1\frac{dx^2}{dl}\right),$$

где знак $e = \pm 1$ выбирается так, чтобы получить абсолютное значение геодезической кривизны.

Если метрику Сасаки dt^2 представить в виде

$$dt^2 = \left(dx^1\right)^2 + \left(G + \rho\left((\sqrt{G})_1\right)^2\right)\left(dx^2\right)^2 + 2\rho(\sqrt{G})_1 dx^2 dx^3 + \rho\left(dx^3\right)^2,$$

в силу предыдущих равенств получаем

$$dt^2 = dl^2 + \rho d\theta^2. \tag{4}$$

Рассмотрим дифференциальные уравнения геодезических кривых $x^\alpha(t)$ на сферическом касательном расслоении $T_\rho M^2$ с метрикой Сасаки g^*, отнесённых к натуральному параметру, т.е.

$$\frac{d^2x^\gamma}{dt^2} + \Gamma^{*\gamma}_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{dt}\frac{dx^\beta}{dt} = 0. \tag{5}$$

Подставив сюда найденные значения символов Кристоффеля, получим

$$\frac{d^2x^1}{dt^2} + \Gamma^1_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt} = \rho(\sqrt{G})_{11}\frac{dx^2}{dt}\frac{d\theta}{dt}, \tag{6}$$

$$\frac{d^2x^2}{dt^2} + \Gamma^2_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt} = -\rho G^{-1}(\sqrt{G})_{11}\frac{dx^1}{dt}\frac{d\theta}{dt}, \tag{7}$$

$$\frac{d^2x^3}{dt^2} + \left((\sqrt{G})_{11} - \rho G^{-1}((\sqrt{G})_1)^2(\sqrt{G})_{11} + G^{-1}G_1(\sqrt{G})_1\right)\frac{dx^1}{dt}\frac{dx^2}{dt} +$$

$$+\left((\sqrt{G})_{12} - \frac{1}{2}G^{-1}G_2(\sqrt{G})_1\right)\left(\frac{dx^2}{dt}\right)^2 - \rho G^{-1}(\sqrt{G})_1(\sqrt{G})_{11}\frac{dx^1}{dt}\frac{dx^3}{dt} = 0. \tag{8}$$

Из первых двух уравнений системы (5) вытекает, что вдоль геодезической кривой $x^\alpha(t)$ на $T_\rho M^2$ имеет место $g_{ij}\xi^i(t)\xi^j_1(t) = 0$, где $\xi^i(t) \equiv \frac{dx^i}{dt}$ - касательный вектор соответствующей базисной кривой $x^i(t)$,

$$\xi^k_1 \equiv \nabla_t \xi^k = \frac{d\xi^k}{dt} + \Gamma^k_{ij}\xi^i\xi^j$$

- ковариантная производная вдоль базисной кривой $x^i(t)$ относительно римановой связности ∇ на базе M^2. Следовательно, вдоль каждой базисной кривой

$$h \equiv \frac{1}{2}g_{ij}\xi^i(t)\xi^j(t) = const. \tag{9}$$

Вычисляя геодезическую кривизну базисных кривых $x^i(t)$, получаем вследствие (5), (9)

$$k_g^2(t) = \frac{\langle\xi,\xi\rangle\langle\xi_1,\xi_1\rangle - \langle\xi,\xi_1\rangle^2}{\langle\xi,\xi\rangle^3} = g_{ij}\xi^i_1(t)\xi^j_1(t)\left[g_{ij}\xi^i(t)\xi^j(t)\right]^{-2} =$$

$$= (2h)^{-2}\left[\rho^2(\sqrt{G})^2_{11}\left(\frac{dx^2}{dt}\right)^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \rho^2 G^{-1}(\sqrt{G})^2_{11}\left(\frac{dx^1}{dt}\right)^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right] =$$

$$= \rho^2 (2h)^{-2} G^{-1} (\sqrt{G})_{11}^2 \left[G \left(\frac{dx^2}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dx^1}{dt} \right)^2 \right] \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \rho^2 K^2 (2h)^{-1} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 .$$

Поскольку параметр t выбран натуральным, то

$$g^*_{\alpha\beta} \xi^\alpha(t) \xi^\beta(t) = g_{ij} \xi^i(t) \xi^j(t) + \rho \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = 1,$$

значит, вдоль геодезических

$$2h + \rho a^2 = 1, \tag{10}$$

$$a \equiv \frac{d\theta}{dt} = \frac{dx^3}{dt} + (\sqrt{G})_1 \frac{dx^2}{dt} = const. \tag{11}$$

Следовательно,

$$k_g = \frac{e\rho a}{\sqrt{2h}} K. \tag{12}$$

Нетрудно убедиться в том, что вследствие (11) уравнение (8) вытекает из первых двух уравнений (6), (7).

Равенство (11) дает промежуточный интеграл геодезических и означает, что касательный вектор $\frac{dx^i}{dt}$ вдоль базисной кривой $x^i(t)$ совершает простое винтовое движение: $\theta = at + a_0$, $a, a_0 - const$. В свою очередь, равенство (12) показывает, что базисная кривая является изопериметрической экстремалью поворота пространства (M^2, g) с изопериметрической постоянной $c = \frac{e\rho a}{\sqrt{2h}}$.

Таким образом, результату П.Надя [10] можем придать следующую формулировку

Теорема 1 *Если кривая $x^\alpha(t)$ является геодезической в сферическом касательном расслоении $T_\rho M^2$ с метрикой Сасаки dt^2, тогда на базисном многообразии M^2 ненулевой гауссовой кривизны K базисная кривая $x^i(t)$ является изопериметрической экстремалью поворота с изопериметрической постоянной $c = \frac{e\rho a}{\sqrt{2h}}$, $e = \pm 1$, её касательный вектор $\frac{dx^i}{dt}$ совершает вдоль неё поступательное движение с постоянной длиной $\sqrt{h}$ и простой винтовой поворот $\theta = at + a_0$ с постоянной скоростью a.*

3. Геодезический поток на $T_\rho M^2$

Рассмотрим кокасательное расслоение $T^*(T_\rho M^2)$ с локальными координатами x^α, p_α и естественной канонической симплектической структурой $\omega = dp_\alpha \wedge dx^\alpha$. Возьмём функцию Гамильтона

$$H(x,p) = \frac{1}{2} g^{*\alpha\beta} p_\alpha p_\beta$$

и отвечающий ей гамильтонов поток $\dot{x} = sgradH$ относительно симплектической структуры ω на $T^*(T_\rho M^2)$. Поскольку H - первый интеграл этого потока, то единичный кокасательный пучок $T_1^*(T_\rho M^2) = \{x^* \in T^*(T_\rho M^2) : \|p\| = 1\}$ инвариантен относительно потока $sgradH$. Ограничение этого потока на $T_1^*(T_\rho M^2)$ будет геодезическим потоком на $T_\rho M^2$. При естественном изоморфизме $T^*(T_\rho M^2) \to T(T_\rho M^2)$ траектории геодезического потока $sgradH$ переходят в кривые, составленные из касательных векторов в $T_\rho M^2$.

Пусть Φ^t - локальная 1-параметрическая группа преобразований, порожденная потоком $sgradH$. Отдельные преобразования из Φ^t переводят пару $(x(0), p(0))$ в пару $(x(t), p(t)) = \Phi^t(x(0), p(0))$, где для получения $x(t)$ следует провести геодезическую через точку $x(0)$ в направлении ковектора $p(0)$ и тогда $x(t)$ отстоит от $x(0)$ на расстоянии t вдоль этой геодезической, а ковектор $p(t)$ касается этой геодезической в $x(t)$ и направлен так же, как и $p(0)$. Таким образом, при получении $x(t) = (x^\alpha(t))$ на базе следует проводить изопериметрическую экстремаль поворота через исходную точку $x^i(0)$. С этой целью интегрируем систему (6), (7) с учётом промежуточного интеграла (11) и постоянную a определим начальными данными:

$$a = \frac{dx^3(0)}{dt} + (\sqrt{G})_1 \frac{dx^2(0)}{dt}.$$

Наконец, для определения компоненты траектории $x^3(t)$, интегрируем уравнение (11) при вышеуказанной постоянной a.

Как известно, гамильтониан $H(x, p)$ является основным первым интегралом геодезического потока. Из (11) имеем ещё один первый интеграл

$$a = p_\alpha \left(g^{*3\alpha} + (\sqrt{G})_1 g^{*2\alpha} \right) = p^{-1} p_3.$$

Аналогичным образом из (9) получаем первый интеграл

$$h = \frac{1}{2} g_{ij} g^{*i\alpha} g^{*j\beta} p_\alpha p_\beta,$$

однако в силу (10) интегралы H, a, h зависимы: $2H = 2h + \rho a^2$.

В случае, когда многообразие (M^2, g) локально изометрично поверхности вращения, возможно указать дополнительный интеграл потока, который вытекает из найденого нами обобщенного интеграла Клеро. Действительно, пусть многообразие (M^2, g) локально изометрично поверхности вращения с меридианом $f(r)$ где r - расстояние до оси вращения. Тогда

$$dl^2 = F^2 + r^2 (dx^2)^2, F = \sqrt{1 + f'^2},$$

где x^2 - долгота точки. Вводя новую координату x^1: $dx^1 = Fdr$, получим метрику dl^2 в виде

$$dl^2 = (dx^1)^2 + r^2(dx^2)^2,$$

т.е. координаты x^1, x^2 полугеодезические и $r(x^1) = \sqrt{G}$. Нетрудно убедиться в том, что $sin\psi = F^{-1} = (\sqrt{G})_1$. Поскольку изопериметрическая постоянная для базисной траектории равна $c = \frac{e\rho a}{\sqrt{2h}} = \frac{ep_3}{\sqrt{2h}}$, то тем самым обобщённый интеграл Клеро (2) приобретает вид

$$\kappa = \sqrt{G} sinx^3 + \frac{p_3}{\sqrt{2h}}.$$

Учитывая, что $sinx^3 = \sqrt{\frac{G}{2h}\frac{dx^2}{dt}}$, получим

$$\kappa = \frac{G}{\sqrt{2h}} g^{*2\alpha} p_\alpha + \frac{p_3}{\sqrt{2h}}(\sqrt{G})_1 = \frac{p_2}{\sqrt{2h}}.$$

Отсюда вытекает, что в данном случае вторая компонента p_2 импульса также является интегралом геодезического потока.

Рассмотрим скобку Пуассона канонической симплектической структуры

$$\{F_1, F_2\} = \mathop{\Sigma}_{\alpha} \frac{\partial F_1}{\partial p_\alpha}\frac{\partial F_2}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial F_2}{\partial p_\alpha}\frac{\partial F_1}{\partial x^\alpha}.$$

Так как в рассматриваемом случае гамильтониан H не зависит сразу от двух переменных x^2, x^3, то нетрудно проверить, что интегралы H, p_2, p_3 находятся в инволюции, т.е.

$$\{H, p_2\} = \{H, p_3\} = \{p_2, p_3\} = 0.$$

Очевидно, что указанные три интеграла независимы и разрешимы относительно импульсов p_1, p_2, p_3. Следовательно, выполнена теорема Лиувилля [1,2] и функции H, p_2, p_3 образуют полное инволютивное семейство интегралов гамильтоновых уравнений

$$\frac{dx^\alpha}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \frac{dp_\alpha}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x^\alpha}.$$

Тем самым имеет место

Теорема 2 *Если риманово многообразие (M^2, g) локально изометрично поверхности вращения, то геодезический поток сферического касательного расслоения $T_\rho M^2$ с метрикой Сасаки вполне интегрируемый.*

Как вытекает из результатов работы [8], соответствующая квадратура для базисных траекторий (не являющихся параллелями) имеет в координатах радиус-долгота следующий вид

$$x^2 = \int\limits_{r_0}^{r} \frac{ec + c_1 F}{r\left(r^2 - (ecF^{-1} + c_1)^2\right)^{\frac{1}{2}}} dr + x_0^2.$$

При $c = 0$ эта квадратура совпадает с известной квадратурой для геодезических кривых на поверхности вращения [14].

Список литературы

1. Фоменко А. Т. *Симплектическая геометрия. Методы и приложения.*- М.:МГУ, 1988.-413 с.
2. Трофимов В.В., Фоменко А. Т. *Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых дифференциальных уравнений.*- М.: Факториал, 1995.- 448 с.
3. *Труды семинара по векторному и тензорному анализу с их приложениями к геометрии, механике и физике.* Научное издание.- М.: МГУ, 1993.-вып.25.-часть 1.-127 с.
4. *Труды семинара по векторному и тензорному анализу с их приложениями к геометрии, механике и физике.* Научное издание.- М.: МГУ, 1993.-вып.25.- часть 2.-151 с.
5. Лейко С.Г. *Вариационные задачи для функционалов поворота и спин-отображения псевдоримановых пространств.* Изв.вузов. Математика.-1990.-№ 10.-С.9-17.
6. Лейко С.Г. *Поворотные диффеоморфизмы на поверхностях евклидова пространства.* Матем.заметки.-1990.-Т.-47.-№ 3.-С.52-57.
7. Лейко С.Г. *Экстремали функционалов поворота кривых псевдориманова пространства и траектории спин-частиц в гравитационных полях.*Докл.РАН.-1992.-Т.325.-№ 4.-С.659-664.
8. Лейко С.Г. *Изопериметрические экстремали поворота на поверхностях в евклидовом пространстве* E^3 Изв.вузов.Математика.-1996.-№ 6.-С.25-32.
9. Лейко С.Г. *Механическая интерпретация изопериметрических экстремалей поворота на поверхностях.* Вiсник Одеського держ. ун-ту.-1999.-Т.4.-№ 4.- С.102-105.
10. Nagy P. *On the tangent sphere bundle of Riemannian 2-manifold.*-1977.-№ 29.-P.203-208.
11. Sasaki S. *On the differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifolds.1* Tohoku Math.J.- 1958.-№ 10.-P.338-354.
12. Sasaki S. *On the differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifolds.2* Tohoku Math.J.- 1962.- № 14.- P.146-155.
13. Бляшке В.В. *Дифференциальная геометрия.* -М.-Л. ОНТИ-НКТП СССР, 1935.- 332 с.
14. Каган В.Ф. *Основы теории поверхностей в тензорном изложении.* Ч.1.-М.-Л.: ГИТТЛ, 1947.- 512 с.

Proc. Intern. Geom. Center 2010 **3**(3) 15–22 $d\omega$

Про властивості інваріантів тензора lgt-сітки і деформації поверхні

Татьяна Юрьевна Вашпанова

Аннотация В даній роботі введені поняття інваріантів тензора LGT-сітки регулярної C^3-поверхні.Обчислені варіації цих геометричних величин при нескінченно малій ареальній деформації (А-деформації) поверхні через компоненти поля зміщення $u^1, u^2, \dot{u}$. Розглянуті питання існування А-деформацій поверхні з стаціонарним першим інваріантом сіткового тензора.

§1. Інваріанти сіткового тензора та їх варіації

1.1. ***Введення інваріантів тензора LGT-сітки.*** Поняття LGT-сітки введено, наприклад в [1]. Диференціальне рівняння LGT-сітки має вигляд:

$$h_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta} = 0,$$

де

$$h_{\alpha\beta} = 2\left(H g_{\alpha\beta} - b_{\alpha\beta}\right). \tag{1.1}$$

Тут H - середня кривина поверхні S, $g_{\alpha\beta}, b_{\alpha\beta}$ - коефіцієнти першої та другої основних квадратичних форм поверхні відповідно. Очевидно, умова $h_{\alpha\beta} = 0$ рівносильна умові

$$\frac{b_{11}}{g_{11}} = \frac{b_{12}}{g_{12}} = \frac{b_{22}}{g_{22}},$$

яка характеризує омбілічні точки поверхні. В подальшому ці точки будемо виключати з розгляду.

З формули (1.1) випливає, що оскільки

$$h = h_{11}h_{22} - h_{12}^2 = -4gE, \quad \text{де } E = H^2 - K \neq 0 \text{ - ейлерова різниця},$$

то LGT-сітка є сіткою гіперболічного типу.

Введемо поняття першого та другого інваріантів сіткового тензора:

$$K_h = \frac{1}{2} c^{i\alpha} c^{j\beta} h_{ij} h_{\alpha\beta}, \tag{1.2}$$

$$2H_h = g^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}. \tag{1.3}$$

З урахуванням (1.1) ці формули набувають відповідно вигляду:

$$K_h = 4K - 4H^2 = -4E, \tag{1.4}$$

$$2H_h = 0. \tag{1.5}$$

1.2. *Варіації величин K_h та H_h через функції $u^1, u^2, \dot{u}$.* Розглянемо нескінченно малу деформацію першого порядку поверхні S з полем зміщення $\mathbf{y}(x^1, x^2)$ і параметром деформації $t \to 0$:

$$\mathbf{r}^*(x^1, x^2) = \mathbf{r}(x^1, x^2) + t\mathbf{y}(x^1, x^2).$$

Розкладемо деформуюче поле $\mathbf{y}$ за базисом $\mathbf{r}_\alpha, \mathbf{n}$ у вигляді:

$$\mathbf{y} = u^\alpha \mathbf{r}_\alpha + \dot{u}\mathbf{n}, \tag{1.6}$$

де $u^1, u^2, \dot{u}$ - компоненти поля зміщення, $\mathbf{r}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^\alpha}$, $\mathbf{n}$ - одиничний вектор нормалі S. Надалі будемо розглядати нескінченно малу ареальну деформацію поверхні S (А-деформацію). Має місце

Лема 1.1. *Необхідною і достатньою умовою того, щоб нескінченно мала деформація в класі C^1-поверхонь була ареальною є умова*

$$\varepsilon_{ij} g^{ij} = 0,$$

де $\delta g_{ij} = 2\varepsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i} - 2\dot{u}b_{ij}$–варіації коефіцієнтів першої квадратичної форми поверхні.

Через компоненти вектора зміщення вона виражається так:

$$u^\alpha_{,\alpha} - 2H\dot{u} = 0. \tag{1.7}$$

Рівняння (1.7) називається рівнянням А-деформації відносно компонентів поля зміщення.

Для подальшого нам потрібні варіації деяких геометричних величин, які обчислені в [2]:

$$\delta g^{ij} = -2g^{i\alpha} g^{j\beta} \varepsilon_{\alpha\beta},$$

$$\delta b_{ij} = \beta_{ij} = \mathbf{y}_{i,j}\mathbf{n} = u^\alpha_{,i} b_{\alpha j} - \dot{u}\nu_{ij} + u^\alpha_{,j} b_{\alpha i} + u^\alpha b_{\alpha i,j} + \dot{u}_{i,j}, \quad \text{де } \nu_{ij} = 2Hb_{ij} - Kg_{ij},$$

$$\delta K = u^\alpha K_{,\alpha} + K\dot{u}_{i,j} d^{ij} + 2HK\dot{u},$$

$$2\delta H = 2H_{,\alpha} u^\alpha + g^{ij}\dot{u}_{i,j} + \dot{u}\left(4H^2 - 2K\right).$$

Тепер знайдемо варіацію сіткового тензора $h_{\alpha\beta}$:

$$\delta h_{\alpha\beta} = 2g_{\alpha\beta}\delta H + 4H\varepsilon_{\alpha\beta} - 2\beta_{\alpha\beta},$$

або , через функції $u^1, u^2, \dot{u}$:

$$\delta h_{\alpha\beta} = \left(2H_{,\gamma} u^\gamma + g^{ij}\dot{u}_{i,j} + 4H^2\dot{u}\right) g_{\alpha\beta} + 2(H-1)u_{\alpha,\beta} +$$

$$+2Hu_{\beta,\alpha} - 2u^i_{,\alpha} b_{i\beta} - 2u^i_{,\beta} b_{i\alpha} - 2u^i b_{i\alpha,\beta}.$$

Варіюванням формул (1.3), (1.4) отримаємо варіації першого та другого інваріантів тензора LGT-сітки:

$$\delta K_h = -8H\delta H + 4\delta K, \tag{1.8}$$

$$2\delta H_h = h_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta} + g^{\alpha\beta}\delta h_{\alpha\beta}. \tag{1.9}$$

Введемо величину $b^{ij} = b^i_\alpha g^{\alpha j}$, тоді варіації інваріантів сіткового тензора LGT-сітки через функції $u^1, u^2, \dot{u}$ набувають вигляду

$$\delta K_h = 4\left(Hg^{ij} - b^{ij}\right)\dot{u}_{i,j} - 16HE\dot{u} - 4E_\alpha u^\alpha, \tag{1.10}$$

$$\delta H_h = 0.$$

§2. Система рівнянь відносно компонентів поля зміщення А-деформації поверхні за умови $\delta K_h = 0$

2.1. ***Вираз вектора зміщення через дві довільні регулярні функції.*** Поле зміщень А-деформації явно виражається через дві довільні регулярні функції. За умови $H \neq 0$ підставивши значення $\dot{u} = \frac{u^\alpha_{,\alpha}}{2H}$ в (1.6), дістанемо вираз деформуючого поля через дві довільні функції класу C^1 у вигляді:

$$\mathbf{y} = u^\alpha \mathbf{r}_\alpha + \frac{u^\alpha_{,\alpha}}{2H}\mathbf{n}. \tag{2.1}$$

У випадку $H = 0$ з (1.7) маємо

$$u^\alpha_{,\alpha} = 0, \tag{2.2}$$

тобто $\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\alpha} + \Gamma^\alpha_{\alpha i}u^i = 0$. Застосувавши формулу Фосса-Вейля, дістанемо

$$\frac{\partial\left(\sqrt{g}u^\beta\right)}{\partial x^\beta} = 0. \tag{2.3}$$

Покладемо

$$u^i = c^{i\beta}\psi_\beta, \tag{2.4}$$

де ψ_β - довільний ковектор класу C^1. Тоді рівнянню (2.3) відносно ψ_β можна надати вигляду

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial x^2} = \frac{\partial \psi_2}{\partial x^1}.$$

Ця рівність означає градієнтність вектора ψ_β. Тобто, існує функція $\psi(x^1, x^2) \in C^2$, через похідні якої виражено вектор u^i, а (2.4) є загальним розв'язком рівняння (2.2).

Отже, для мінімальної поверхні деформуюче поле набуває вигляду:

$$\mathbf{y} = c^{\alpha\beta}\psi_\beta \mathbf{r}_\alpha + \dot{u}\mathbf{n}, \tag{2.5}$$

де довільними є функції $\psi \in C^2$ та $\dot{u} \in C^1$. Звідси випливає

Теорема 2.1. [3] *Будь-яка поверхня класу C^2 без омбілічних точок допускає ареальні нескінченно малі деформації з довільністю в дві регулярні функції двох змінних. Деформуюче поле при цьому виражається за формулою (2.1) (якщо $H \neq 0$) або (2.5) (якщо $H = 0$).*

2.2. ***Постановка задачі. Дослідження основної системи рівнянь.*** Розглянемо
А-деформацію поверхні, при якій зберігається перший інваріант K_h тензора LGT-сітки, тобто за умови $\delta K_h = 0$. Справедлива

Теорема 2.2. *Для того щоб при А-деформації поверхні зберігався перший інваріант тензора LGT-сітки, необхідно і достатньо, щоб компоненти поля зміщення задовольняли наступну систему рівнянь:*

$$\begin{cases} u^{\alpha}_{,\alpha} - 2H\dot{u} = 0, \\ \left(Hg^{ij} - b^{ij}\right)\dot{u}_{i,j} - 4HE\dot{u} - E_{\alpha}u^{\alpha} = 0. \end{cases} \tag{2.6}$$

Значить, задача про існування А-деформацій поверхні S з стаціонарним першим інваріантом тензора LGT-сітки зведена до розв'язання системи (2.6) двох диференціальних рівнянь з частинними похідними відносно трьох невідомих функцій . При її дослідженні розглянемо такі випадки:

I випадок. Нехай $H = 0$. Для мінімальної поверхні система рівнянь (2.6) набуває вигляду:

$$\begin{cases} u^{\alpha}_{,\alpha} = 0, \\ b^{ij}\dot{u}_{i,j} - K_{\alpha}u^{\alpha} = 0. \end{cases} \tag{2.7}$$

У цьому випадку загальним розв'язком рівняння $(2.7)_1$ є функція (2.4). Отже, рівняння $(2.7)_2$ запишеться так:

$$b^{ij}\dot{u}_{i,j} = K_{\alpha}c^{\alpha i}\psi_i. \tag{2.8}$$

Якщо вважати функцію ψ заздалегідь заданою, то рівняння (2.8) можна кваліфікувати як неоднорідне диференціальне рівняння з частинними похідними другого порядку гіперболічного типу (наприклад, в асимптотичних лініях, коли $b_{11} = b_{22} = 0, b_{12} \neq 0$, його дискримінант є від'ємним) відносно функції $\dot{u}$. Воно допускає розв'язки (див. приклад у пункті 2.3). Таким чином, має місце

Теорема 2.3. *Якщо функції $\psi(x^1, x^2)$ та $\dot{u}(x^1, x^2)$ є розв'язками диференціального рівняння (2.8), то існує А-деформація з стаціонарним першим інваріантом тензора LGT-сітки мінімальної поверхні, для якої вектор зміщення виражається у явному вигляді (2.5) через одну довільну функцію класу C^1.*

II випадок. Покладемо $u^{\alpha} = 0$. Звідси випливає, що $\dot{u} \neq 0$ (оскільки тоді вектор зміщення $\mathbf{y} \equiv 0$). У даному випадку нескінченно мала деформація називається нормальною (див.[2]). Для нормальної А-деформації вектор зміщення має вигляд

$$\mathbf{y} = \dot{u}\mathbf{n}, \tag{2.9}$$

Клас нескінченно малих згинань входить в клас нескінченно малих ареальних деформацій, як окремий випадок. Ознакою того, щоб ареальна нескінченно мала деформація була А-тривіальною (тобто зводилася до нескінченно малого згинання) є умова

$$\varepsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i} - 2\dot{u}b_{ij} = 0. \tag{2.10}$$

Очевидно, має місце

Лема 2.1. *Для того щоб нормальна А-деформація була А-тривіальною необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова $\dot{u} = 0$.*

У випадку нормальної деформації система рівнянь (2.6) матиме вигляд

$$\begin{cases} H = 0, \\ b^{ij}\dot{u}_{i,j} = 0. \end{cases} \tag{2.11}$$

$(2.11)_2$ є однорідним диференціальним рівнянням з частинними похідними другого порядку гіперболічного типу відносно функції $\dot{u}$. Звідси випливає

Теорема 2.4. *Нормальну нетривіальну А-деформацію, при якій $\delta K_h = 0$ допускають мінімальні поверхні і тільки вони. При цьому вектор зміщення має вигляд (2.9), а функція $\dot{u}$ є розв'язком диференціального рівняння* $(2.11)_2$.

III випадок. Нехай для будь-якої регулярної поверхні нормальна компонента $\dot{u} = 0$. Тоді поле зміщень А-деформації розташоване в дотичній площині до S. Такі деформації називаються тангенціальними. З системи (2.6) отримаємо:

$$\begin{cases} u^{\alpha}_{,\alpha} = 0, \\ E_{\alpha}u^{\alpha} = 0. \end{cases} \tag{2.12}$$

Рівняння $(2.12)_2$ з урахуванням (2.4), можна подати так

$$c^{\alpha i}E_{\alpha}\psi_i = 0,$$

або, в розгорнутому вигляді:

$$E_1\frac{\partial\psi}{\partial x^2} - E_2\frac{\partial\psi}{\partial x^1} = 0. \tag{2.13}$$

Дістали одне диференціальне рівняння з частинними похідними першого порядку відносно функції $\psi(x^1, x^2)$. Загальний розв'язок цього рівняння можна виразити у неявному вигляді (див.[4]) :

$$\psi = F\left(\int\frac{dx^1}{E_1} - \int\frac{dx^2}{E_2}\right), \qquad E_i \neq 0 \tag{2.14}$$

де $F(x^1, x^2)$ - довільна неперервно диференційована функція.

Вектор зміщення у цьому випадку має вигляд

$$\mathbf{y} = c^{i\beta}\psi_{\beta}\mathbf{r_i}, \tag{2.15}$$

Отже, має місце наступний результат:

Теорема 2.5. *Тангенціальні А-деформації з стаціонарним першим інваріантом сіткового тензора допускає будь-яка поверхня класу $S \in C^3$ без омбілічних точок. Поле зміщення через функцію ψ виражається у вигляді (2.15), а функція $\psi(x^1, x^2)$ є розв'язком диференціального рівняння (2.13).*

IV випадок. Нехай $H \neq 0$. Підставимо значення $\dot{u} = \frac{u^{\alpha}_{,\alpha}}{2H}$ у рівняння $(2.6)_2$ та отримаємо одне однорідне диференціальне рівняння з частинними похідними третього порядку відносно двох невідомих функцій u^1, u^2:

$$\left(Hg^{ij} - b^{ij}\right)\left(\frac{u^{\alpha}_{,\alpha}}{2H}\right)_{i,j} - 2Eu^{\alpha}_{,\alpha} - E_{\alpha}u^{\alpha} = 0. \tag{2.16}$$

Звідси випливає

Теорема 2.6. *Будь-яка немінімальна поверхня класу C^2 без омбілічних точок допускає A-деформації за умови $\delta K_h = 0$ з вектором зміщення (2.1), де функції u^1, u^2 є ненульовими розв'язками диференціального рівняння (2.16).*

2.3. Ілюстрація результатів на прикладах.

Приклад 1. Розглянемо рівняння ***прямого гелікоїда*** у вигляді

$$\mathbf{r} = \{x^1 \cos x^2, x^1 \sin x^2, x^2\}.$$

Обчислимо:

$$g_{11} = 1, \quad g_{12} = 0, \quad g_{22} = (x^1)^2 + 1, \quad b_{11} = b_{22} = 0, \quad b_{12} = -\frac{1}{\sqrt{(x^1)^2 + 1}},$$

$$\rho_{11} = -\frac{1}{(x^1)^2 + 1}, \quad \rho_{12} = 0, \rho_{22} = 1, \quad h_{11} = h_{22} = 0, \quad h_{12} = \frac{2}{\sqrt{(x^1)^2 + 1}},$$

$$\mathbf{n} = \left(\frac{sinx^2}{\sqrt{(x^1)^2+1}}, -\frac{cosx^2}{\sqrt{(x^1)^2+1}}, \frac{x^1}{\sqrt{(x^1)^2+1}} \right),$$

$$2H = 0, \quad K = \widetilde{K} = -\frac{1}{((x^1)^2+1)^2}, \quad 2\widetilde{H} = 0, \quad K_h = -\frac{4}{((x^1)^2+1)^2}, \quad 2H_h = 0.$$

Прямий гелікоїд є мінімальною поверхнею. Для мінімальної поверхні в зазначеній вище задачі має місце рівняння (2.8). Покладемо $\psi = 0$.

Тоді це рівняння запишеться у вигляді:

$$b^{ij} \dot{u}_{i,j} = 0,$$

а в асимптотичній системі координат

$$\frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial x^1 \partial x^2} - \Gamma^1_{12} \frac{\partial \dot{u}}{\partial x^1} - \Gamma^2_{12} \frac{\partial \dot{u}}{\partial x^2} = 0. \tag{2.17}$$

Для прямого гелікоїда рівняння з (2.17) маємо:

$$\frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial x^1 \partial x^2} - \frac{x^1}{1 + (x^1)^2} \frac{\partial \dot{u}}{\partial x^2} = 0. \tag{2.18}$$

Введемо функції

$$\frac{\partial \dot{u}}{\partial x^2} = \varphi(x^1, x^2); \quad \xi(x^1) = \frac{x^1}{1 + (x^1)^2}.$$

Тоді з (2.18) отримаємо рівняння

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x^1} = \varphi(x^1, x^2) \xi(x^1). \tag{2.19}$$

Його загальний розв'язок виразимо через довільну функцію $c(x^2)$:

$$\dot{u}(x^1, x^2) = c(x^2) \sqrt{1 + (x^1)^2}. \tag{2.20}$$

З (2.9) знайдемо вектор зміщення для прямого гелікоїда у явному вигляді:

$$\mathbf{y} = \{c(x^2) \sin x^2, -c(x^2) \cos x^2, c(x^2) x^1\}. \tag{2.21}$$

Звідси випливає

Теорема 2.7. *Поверхня прямого гелікоїда допускає нетривіальні нормальні A-деформації, при яких зберігається перший інваріант тензора LGT-сітки, причому вектор зміщення має вигляд (2.21).*

Приклад 2. ***Еліптичний параболоїд*** задамо рівнянням:

$$\mathbf{r} = \left(x^1 \cos x^2, x^1 \sin x^2, \frac{(x^1)^2}{2} \right).$$

Обчислимо:

$$g_{11} = (x^1)^2 + 1, \quad g_{22} = (x^1)^2, \quad g_{12} = 0, \quad b_{11} = \frac{1}{\sqrt{(x^1)^2 + 1}}, \quad b_{22} = \frac{(x^1)^2}{\sqrt{(x^1)^2 + 1}},$$

$$b_{12} = 0, \rho_{11} = \rho_{22} = 0, \quad \rho_{12} = \frac{(x^1)^3}{2((x^1)^2 + 1)}, \quad h_{11} = \frac{(x^1)^2}{\sqrt{1 + (x^1)^2}}, \quad h_{12} = 0,$$

$$h_{22} = -\frac{(x^1)^4}{\sqrt{(1 + (x^1)^2)^3}}, K = \frac{1}{((x^1)^2 + 1)^2}, \quad 2H = \frac{2 + (x^1)^2}{\sqrt{(1 + (x^1)^2)^3}}, \quad \widetilde{K} = -\frac{(x^1)^4}{4((x^1)^2 + 1)^3},$$

$$2\widetilde{H} = 0, \quad E = \frac{(x^1)^4}{4\left(1 + (x^1)^2\right)^3}, K_h = -\frac{(x^1)^4}{\left(1 + (x^1)^2\right)^3}, \quad 2H_h = 0.$$

Розглянемо тангенціальні A-деформації з стаціонарним першим інваріантом сіткового тензора для еліптичного параболоїда.

Рівняння (2.13) для еліптичного параболоїда спрощується:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x^1} = 0.$$

Очевидно, що розв'язком цього рівняння буде будь-яка регулярна функція від однієї змінної:

$$\psi = \psi(x^2).$$

У цьому випадку отримаємо наступний вираз вектора зміщення:

$$\mathbf{y} = \left(\frac{\cos x^2}{\sqrt{g}}, \frac{\sin x^2}{\sqrt{g}}, \frac{x^1}{\sqrt{g}} \right) \frac{\partial \psi}{\partial x^2}. \tag{2.22}$$

Таким чином, справедлива

Теорема 2.8. *Поверхня еліптичного параболоїда допускає нетривіальні тангенціальні A-деформації, при яких зберігається перший інваріант тензора LGT-сітки, причому вектор зміщення у явному вигляді виражається за формулою (2.22).*

Література

1.*Безкоровайная Л.Л.,Вашпанова Т.Ю.* LGT-сеть поверхности и ее свойства //Вестник Киевского национального университета им.Т.Шевченка,Сер.физ.-мат. науки, вып.2, 2010, с.7–12.
2. *Безкоровайна Л.Л.* Ареальні нескінченно малі деформації і врівноважені стани пружної оболонки: Навчальний посібник. - Одеса: Астропринт, 1999. - 168 с
3.*Безкоровайна Л.Л.* А-деформации поверхностей постоянной средней кривизны с краем /Деп.в УкрНИИНТИ №2581 – УК88.–20 с.–От 10.10.88.
4. *Степанов В.В.* Курс дифференциальных уравнений 8-е изд. М.: ГИФМЛ, 1959.

Татьяна Юрьевна Вашпанова
ОНУ ім.І.І.Мечникова, Одеса, Україна
E-mail: tatyana_top@mail.ru

T. Yu. Vashpanova

In the given work concepts of invariants of a tensor of LGT-network regular C^3-surfaces are entered. Variations of these geometrical sizes are calculated at infinitesimal areal deformation (A-deformations)of surface through components of a field of displacement $u^1, u^2, \dot{u}$. The questions of existance A-deformations of a surface with stationary first invariant of a tensor of LGT-network are considered.

Tensor product of idempotent measures

Oleksandra Hubal' **Aleksandr Savchenko** **Mykhailo Zarichnyi**

Abstract We consider the idempotent measure monad on the categories of compact Hausdorff spaces, ultrametric spaces and nonexpanding maps, and fuzzy ultrametric spaces. The main result of the paper is the following: the G-symmetric power functor admits an extension onto the Kleisli category of the idempotent measure monad, i.e., the category whose morphisms are idempotent-measure-valued maps.

Keywords Fuzzy metric space · Idempotent measure · Fuzzy ultrametric

Mathematics Subject Classification (2000) 54E70, 54A40, 60B05

1 Introduction

In this paper we consider the functor of idempotent measures in three categories: of compact Hausdorff spaces, of ultrametric spaces and of fuzzy ultrametric spaces. The idempotent measures were first systematically considered in the school lead by V. Maslov. The topological properties of the functor of idempotent measures were investigated in [2].

The idempotent measure functor is tightly connected with the geometry of the max-plus convex sets. Roughly speaking, the spaces of idempotent measures are free max-plus convex sets.

We investigate the operation of tensor product of idempotent measures. The main result states that this operation allows to define the extension of the G-symmetric power functor onto the monad generated by the functor of idempotent measures. Note that the results concerning existence of extension of functors onto the Kleisli categories have numerous applications, in particular, in the semantics of programming languages.

2 Preliminaries

2.1 Spaces of idempotent measures

We recall some necessary information that concerns the idempotent measures in the compact Hausdorff spaces and metrizable spaces.

Let X be a topological space. By $C(X)$ we denote the space of continuous functions on X endowed with the compact-open topology. If X is compact Hausdorff, then this topology is generated by the sup-norm. For any $c \in \mathbb{R}$ we denote by c_X the constant function on X taking the value c.

Following [8], we denote by $\odot\colon \mathbb{R} \times C(X) \to C(X)$ the map acting by $(\lambda, \varphi) \mapsto \lambda_X + \varphi$, and by $\oplus\colon C(X) \times C(X) \to C(X)$ the map acting by $(\varphi, \psi) \mapsto \max\{\varphi, \psi\}$. Also, we let $a \oplus b = \max\{a, b\}$, for $a, b \in \mathbb{R}$.

Definition 1 Let X be a compact Hausdorff space. A functional $\mu\colon C(X) \to \mathbb{R}$ is called an *idempotent probability measure* (*Maslov* measure) if

1. $\mu(c_X) = c$;
2. $\mu(c \odot \varphi) = c \odot \mu(\varphi)$;
3. $\mu(\varphi \oplus \psi) = \mu(\varphi) \oplus \mu(\psi)$.

The value $\mu(\varphi)$ is also called the *Maslov integral* of φ with respect to μ.

Let $I(X)$ denote the set of all idempotent probability measures on X. We endow $I(X)$ with the weak* topology. A base of this topology is formed by the sets

$$O(\mu; \varphi_1, \dots, \varphi_n; \varepsilon) = \{\nu \in I(X) \mid |\mu(\varphi_i) - \nu(\varphi_i)| < \varepsilon,\ i = 1, \dots, n\}.$$

It is proved in [14] that the space $I(X)$ is compact Hausdorff.

The following is an example of an idempotent probability measure on X. Let $x_1, \dots, x_n \in X$ and $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ be numbers such that $\max\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} = 0$. Define $\mu\colon C(X) \to \mathbb{R}$ as follows: $\mu(\varphi) = \max\{\varphi(x_i) + \lambda_i \mid i = 1, \dots, n\}$. As usual, for every $x \in X$, we denote by δ_x the functional on $C(X)$ defined as follows: $\delta_x(\varphi) = \varphi(x)$, $\varphi \in C(X)$ (the functional δ_x is called the Dirac measure concentrated at x). Then one can write $\mu = \oplus_{i=1}^n \lambda_i \odot \delta_{x_i}$.

Given a continuous map $f\colon X \to Y$, the map $I(f)\colon I(X) \to I(Y)$ is defined as follows. Let $\varphi \in C(Y)$, then, given $\mu \in O(X)$, we let $I(f)(\mu)(\varphi) = \mu(\varphi \circ f)$.

We obtain a covariant functor I in the category **Comp** of compact Hausdorff spaces and continuous maps.

It is known (see [14]) that the functor I preserves the class of embeddings. In the sequel, for any closed subset A of a compact Hausdorff space X, we identify the set $I(A)$ with the subset $I(\iota)(A)$ of $I(X)$, where $\iota\colon A \to X$ denotes the embedding.

Also, the functor I preserves the intersections, i.e., $I(\cap_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha) = \cap_{\alpha\in\Gamma} I(A_\alpha)$, for every family $\{A_\alpha \mid \alpha \in \Gamma\}$ of closed subsets of a compact Hausdorff space X.

Now, for a compact Hausdorff space X and $a \in I(X)$, define the *support* of a (denoted $\mathrm{supp}(a)$) as follows:

$$\mathrm{supp}(a) = \cap\{A \in \exp X \mid a \in I(A) \subset I(X)\}.$$

Recall that a compact Hausdorff space is called *zero-dimensional* if it possesses a base consisting of sets which are open and closed.

Let X be a metrizable space. By βX we denote the Čech-Stone compactification of X.

By $I(X)$ we denote the space of idempotent measures with compact support in X.

Recall that the *support* of an idempotent measure $\mu \in I(X)$ is the minimal (with respect to the inclusion) closed set $\mathrm{supp}(\mu)$ such that $\mu(X \setminus \mathrm{supp}(\mu)) = 0$.

Any idempotent measure μ of finite support can be represented as follows: $\mu = \oplus_{i=1}^n \alpha_i \odot \delta_{x_i}$, where $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in [-\infty, 0]$ and $\oplus_{i=1}^n \alpha_i = 0$. By $I_\omega(X)$ we denote the set of all idempotent measures with finite supports in X.

2.2 Monads and Kleisli categories

We recall some necessary definitions from the category theory; see e.g., [1] for details.

By $|\mathcal{C}|$ we denote the class of objects of a category $\mathcal{C}$. If $X, Y \in |\mathcal{C}|$, then $\mathcal{C}(X, Y)$ stands for the set of morphisms from X to Y in the category $\mathcal{C}$.

A triple $\mathbb{T} = (T, \eta, \mu)$ is called a monad in the category $\mathcal{C}$, if T is an endofunctor in $\mathcal{C}$ and $\eta\colon 1_{\mathcal{C}} \to T$, $\mu\colon T2 \equiv TT \to T$ are natural transformations such that the diagrams

$$T[r]^{-}\eta T[dr]^{-}1_T[d]_{T\eta}T2[d]^{\mu}T2[r]^{\mu}T \qquad T3[r]^{-}\mu T[d]_{T\mu}T2[d]^{\mu}T2[r]^{\mu}T$$

are commutative.

The Kleisli category $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$ of a monad $\mathbb{T}$ is defined as follows: $|\mathcal{C}_{\mathbb{T}}| = |\mathcal{C}|$, $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}(X, Y) = \mathcal{C}(X, T(Y))$, and the composition $g * f$ of morphisms $f \in \mathcal{C}_{\mathbb{T}}(X, Y)$, $g \in \mathcal{C}_{\mathbb{T}}(Y, Z)$ is defined by the formula $g * f = \mu_Z T(g) f$.

Define the functor $F_{\mathbb{T}}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}_{\mathbb{T}}$ by the conditions: $F_{\mathbb{T}}(X) = X$ for every $X \in |\mathcal{C}|$ and $F_{\mathbb{T}}(f) = \eta_Y f$ for every $f \in \mathcal{C}(X, Y)$.

A functor $\overline{F}\colon \mathcal{C}_{\mathbb{T}} \to \mathcal{C}_{\mathbb{T}}$ is called an extension of a functor $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ onto the Kleisli category $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$, if $F_{\mathbb{T}} F = \overline{F} F_{\mathbb{T}}$.

Theorem 1 *There exists a bijective correspondence between the extensions of a functor F onto the Kleisli category $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$ of a monad $\mathbb{T}$ and the natural transformations $\xi\colon FT \to TF$ satisfying the conditions:*

1. $\xi F(\eta) = \eta_F$;
2. $\mu_F T(\xi) \xi_T = \xi F(\mu)$.

Proof See [13].

Let X be a compact Hausdorff space. Given $\varphi \in C(X)$, define $\bar{\varphi}\colon I(X) \to \mathbb{R}$ as follows: $\bar{\varphi}(\mu) = \mu(\varphi)$, $\mu \in I(X)$.

Given $M \in I2(X)$, define the map $\zeta_X(M)\colon C(X) \to \mathbb{R}$ as follows: $\zeta_X(M)(\varphi) = M(\bar{\varphi})$.

Let also $\eta_X(x) = \delta_x$, for any $x \in X$.

Theorem 2 *The triple $\mathbb{I} = (I, \eta, \zeta)$ is a monad on the category of compact Hausdorff spaces.*

Proof See [14].

3 Ultrametric spaces

Recall that a metric on a set X is called an *ultrametric* if the following strong triangle inequality holds:

$$d(x, y) \le \max\{d(x, z), d(z, y)\}$$

for all $x, y, z \in X$.

By $O_r(A)$ we denote the r-neighborhood of a set A in a metric space. We write $O_r(x)$ if $A = \{x\}$.

Recall that a map $f\colon X \to Y$, where (X, d) and (Y, ϱ) are metric spaces, is called *nonexpanding* if $\varrho(f(x), f(y)) \le d(x, y)$, for every $x, y \in X$.

By $\exp X$ we denote the set of all nonempty compact subsets in X endowed with the Hausdorff metric:

$$d_H(A,B) = \inf\{\varepsilon > 0 \mid A \subset O_\varepsilon(B),\ B \subset O_\varepsilon(A)\}.$$

For a continuous map $f\colon X \to Y$ the map $\exp f\colon \exp X \to \exp Y$ is defined as $(\exp f)(A) = f(A)$.

It is well-known that $\exp f$ is a nonexpanding map if so is f. We denote by $s_X : X \to \exp X$ the singleton map, $s_X(x) = \{x\}$.

We first define the set $I(X)$ for any Tychonov space X. The family $\exp X$ of nonempty compact subsets in X is partially ordered by inclusion. We define the set $I(X)$ to be the direct limit of the direct system $\{I(A), I(\iota_{AB}); \exp X\}$ (here, for $A, B \in \exp X$ with $A \subset B$, we denote by $\iota_{AB}\colon A \to B$ the inclusion map). For every $A \in \exp X$, we identify $I(A)$ with the corresponding subset of $I(X)$ along the map $I(\iota_A)$, where $\iota_A\colon A \to X$ is the limit inclusion map. For any $\mu \in I(X)$, there exists a unique minimal $A \in \exp X$ such that $\mu \in I(A)$. Then we say that A is the *support* of μ and write $\mathrm{supp}(\mu) = A$.

There exists a natural pairing $(\mu, \varphi) \mapsto \mu(\varphi)\colon I(X) \times C(X) \to \mathbb{R}$. Note that, for any $\mu \in I(X)$ and $\varphi, \psi \in C(X)$ with $\varphi|\mathrm{supp}(\mu) = \psi|\mathrm{supp}(\mu)$, we have $\mu(\varphi) = \mu(\psi)$.

Now, let (X,d) be an ultrametric space. Let us define an ultrametric on the set $I(X)$. For any $\varepsilon > 0$, denote by $\mathcal{F}_\varepsilon = \mathcal{F}_\varepsilon(X)$ the set of all functions $\varphi \in C(X)$ satisfying the property: for any $y \in \varphi(X)$ the set $\varphi^{-1}(y)$ is the union of open balls of radii ε.

Recall that the set $C(X)$ is endowed with the compact-open topology.

Lemma 1 *The set $\cup\{\mathcal{F}_c \mid c > 0\}$ is dense in $C(X)$.*

Given $\mu, \nu \in I(X)$, we let

$$\hat{d}(\mu,\nu) = \inf\{\varepsilon > 0 \mid \mu(\varphi) = \nu(\varphi) \text{ for all } \varphi \in \mathcal{F}_\varepsilon\}.$$

The following is proved in [6].

Proposition 1 *The function $\hat{d}$ is an ultrametric on the set $I(X)$.*

The functor I on the category **UMet** of ultrametric spaces and nonexpanding maps is considered in [6]. It is proved therein that this functor determines a monad on the category **UMet**.

3.1 Fuzzy metric spaces

The notion of fuzzy metric space, in one of its forms, is introduced by Kramosil and Michalek [7]. In the present paper we use the version of this concept given in the paper [3] by George and Veeramani.

Definition 1 A binary operation $*\colon [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ is a continuous t-norm if $*$ is satisfying the following conditions:

(i) $*$ is commutative and associative;
(ii) $*$ is continuous;
(iii) $a * 1 = a$ for all $a \in [0,1]$;
(iv) $a * b \le c * d$ whenever $a \le c$ and $b \le d$, and $a, b, c, d \in [0,1]$.

The following are examples of t-norms: $a * b = ab$; $a * b = \min\{a, b\}$.

Definition 2 A 3-tuple $(X, M, *)$ is said to be a fuzzy metric space if X is an arbitrary set, $*$ is a continuous t-norm and M is a fuzzy set on $X2\times(0,\infty)$ satisfying the following conditions for all $x, y, z \in X$ and $s, t > 0$:

(i) $M(x, y, t) > 0$,
(ii) $M(x, y, t) = 1$ if and only if $x = y$,
(iii) $M(x, y, t) = M(y, x, t)$,
(iv) $M(x, y, t) * M(y, z, s) \le M(x, z, t + s)$,
(v) the function $M(x, y, -)\colon (0,\infty) \to [0, 1]$ is continuous.

It is proved in [3] that in a fuzzy metric space X, the function $M(x, y, -)$ is non-decreasing for all $x, y \in X$.

The following notion is introduced in [3] (see Definition 2.6 therein).

Definition 3 Let $(X, M, *)$ be a fuzzy metric space and let $r \in (0, 1)$, $t > 0$ and $x \in X$. The set
$$B(x, r, t) = \{y \in X \mid M(x, y, t) > 1 - r\}$$
is called the *open ball* with center x and radius r with respect to t.

The family of all open balls in a fuzzy metric space $(X, M, *)$ forms a base of a topology in X; this topology is denoted by τ_M and is known to be metrizable (see [3]).

If $(X, M, *)$ is a fuzzy metric space and $Y \subset X$, then, clearly,
$$M_Y = M|(Y \times Y \times (0,\infty))\colon Y \times Y \times (0,\infty) \to [0, 1]$$
is a fuzzy metric on the set Y. We say that the fuzzy metric M_Y is *induced* on Y by M.

Let $(X, M, *)$ and $(X', M', *)$ be fuzzy metric spaces. A map $f\colon X \to X'$ is called *nonexpanding* if $M'(f(x), f(y), t) \ge M(x, y, t)$, for all $x, y \in X$ and $t > 0$. For our purposes, it is sufficient to consider the class of fuzzy metric spaces with the same fixed norm (e.g., $*$). The fuzzy metric spaces (with the norm $*$) and nonexpanding maps form a category, which we denote by $\mathcal{FMS}(*)$.

The Hausdorff fuzzy metric M_H on $\exp X$ is defined by the formula:
$$M_H(A, B, t) = \min\left\{\inf_{a\in A} M(a, B, t), \inf_{b\in B} M(A, b, t)\right\}$$
(see [10]).

4 Fuzzy ultrametric spaces

One can define a counterpart of the notion of ultrametric in the realm of fuzzy metric spaces (see, e.g., [9]).

Definition 1 A 3-tuple $(X, M, *)$ is said to be a fuzzy ultrametric space if X is an arbitrary set, $* = \min$ and M is a fuzzy set on $X2 \times (0,\infty)$ satisfying conditions (i), (ii), (iii), (v) from Definition 2 and the following condition:

(iv') $M(x, y, t) * M(y, z, s) \le M(x, z, \max\{t, s\})$, for all $x, y, z \in X$ and $t, s \in (0,\infty)$.

In [9], it is remarked that condition (iv') is equivalent to the following:

(iv") $M(x,y,t) * M(y,z,t) \le M(x,z,t)$, for all $x,y,z \in X$ and $t \in (0,\infty)$

(see also [11, Definition 5]).

The fuzzy ultrametric spaces and nonexpanding maps form a category which we denote by $\mathcal{FUMS}(*)$.

5 Main result

Given a fuzzy ultrametric space $(X, M, \min)$, $r \in (0,1)$, and $t > 0$, denote by $\mathcal{F}_{r,t} = \mathcal{F}_{r,t}(X)$ the set of functions which are constant on the balls of the form $B(x,r,t)$, for $x \in X$.

Define a function $\hat{M}\colon I(X) \times I(X) \times (0,\infty) \to [0,1]$ by the formula:

$$\hat{M}(\mu,\nu,t) = 1 - \inf\{r \in (0,1) \mid \mu(\varphi) = \nu(\varphi) \text{ for all } \varphi \in \mathcal{F}_{r,t}\}.$$

Theorem 1 *The function $\hat{M}$ is a fuzzy ultrametric on the set $I(X)$ (with respect to the t-norm* min*).*

Proof Conditions (i) and (iii) from Definition 2 are obviously satisfied.

Let us verify condition (ii). Clearly, $\hat{M}(\mu,\mu,t) = 1$, for every $\mu \in I(X)$ and $t > 0$. Conversely, if $\hat{M}(\mu,\nu,t) = 1$, then $\mu(\varphi) = \nu(\varphi)$, for every $\varphi \in \mathcal{F}_{r,t}$ and $r \in (0,1)$. Since, by the Weierstrass-Stone theorem, for every compact set $K \supset \mathrm{supp}(\mu) \cup \mathrm{supp}(\mu)$, the set $\{\varphi|K \mid \varphi \in \cup_{r\in(0,1)}\mathcal{F}_{r,t}\}$ is dense in $C(K)$, we conclude that $\mu = \nu$.

Let us verify Condition (iv') from Definition 1. Let $\mu,\nu,\tau \in I(X)$, $t \in (0,\infty)$.

If $\hat{M}(\mu,\nu,t) > 1-r$ and $\hat{M}(\nu,\tau,t) > 1-r$, then $\mu(\varphi) = \nu(\varphi))$, for all $\varphi \in \mathcal{F}_r$. Also, $\nu(\varphi)) = \tau(\varphi))$, for all $\varphi \in \mathcal{F}_r$, and $\varphi \in \mathcal{F}_r$ $\nu(\varphi)) = \tau(\varphi))$, for all $x \in X$.

Therefore,

$$\mu(\varphi)) = \nu(\varphi)) = \tau(\varphi)),$$

for all $\varphi \in \mathcal{F}_{r,t}$, whence $\hat{M}(\mu,\tau,t) > 1-r$ and the result follows.

We are now going to verify condition (v) from Definition 2. Let $\mu,\nu \in I(X)$, $t_0 \in (0,\infty)$ and $\hat{M}(\mu,\nu,t_0) = 1 - r_0$.

Let $(t_i)_{i=1}^{\infty}$ be a nondecreasing sequence in $(0,\infty)$ with $\lim_{i\to\infty} t_i = t_0$. Suppose that $\hat{M}(\mu,\nu,t_i) = 1 - r_i$, $i = 0,1,2,\dots$. Then $(r_i)_{i=1}^{\infty}$ is a nonincreasing sequence in $(0,1]$. Suppose that $r_0' = \lim_{i\to\infty} r_i > r_0 + 2c$, for some $c > 0$.

Then $\mu(\varphi) = \nu(\varphi)$, for all for all $\varphi \in \mathcal{F}_{r_0+c,t_0}$.

In [12] it is proved that there exists $\eta > 0$ such that, for every $x,y \in \mathrm{supp}(\mu) \cup \mathrm{supp}(\nu)$, we have

$$|M(x,y,t_0-\eta) - M(x,y,t_0)| < c.$$

There exists $i \in \mathbb{N}$ such that $t_i > t_0 - \eta$. We are going to show that

$$B(x,r_0,t_0) \cap (\mathrm{supp}(\mu) \cup \mathrm{supp}(\nu)) \subset B(x,r_0+c,t_i).$$

Indeed, if $y \in B(x,r_0,t_0) \cap (\mathrm{supp}(\mu) \cup \mathrm{supp}(\nu))$, then $M(x,y,t_0) > 1 - r_0$, whence $M(x,y,t_i) > 1 - r_0 - c$ and therefore $y \in B(x,r_0+c,t_i)$. Now, if $y \in B(x,r_0,t_0) \cap (\mathrm{supp}(\mu) \cup \mathrm{supp}(\nu))$, then $y \in B(y,r_0,t_0) = B(x,r_0,t_0) \subset B(x,r_0+c,t_i)$. We therefore conclude that every set $B(x,r_0+c,t_i) \cap (\mathrm{supp}(\mu) \cup \mathrm{supp}(\nu))$, where $x \in \mathrm{supp}(\mu) \cup$

$\mathrm{supp}(\nu)$, is a disjoint union of the sets of the form $B(y, r_0, t_0) \cap (\mathrm{supp}(\mu) \cup \mathrm{supp}(\nu))$, where $y \in \mathrm{supp}(\mu) \cup \mathrm{supp}(\nu)$. In turn, this implies that

$$\mathcal{F}_{r_0+c,t_i}(\mathrm{supp}(\mu) \cup \mathrm{supp}(\nu)) \subset \mathcal{F}_{r_0,t_i}(\mathrm{supp}(\mu) \cup \mathrm{supp}(\nu)),$$

whence , for every $\varphi \in \mathcal{F}_{r_0+c,t_i}$,

$$\begin{aligned}\mu(\varphi) =& \mu(\varphi|(\mathrm{supp}(\mu) \cup \mathrm{supp}(\nu)))\\ =& \nu(\varphi|(\mathrm{supp}(\mu) \cup \mathrm{supp}(\nu))) = \nu(\varphi).\end{aligned}$$

Therefore, $\hat{M}(\mu, \nu, t_i) \leq 1 - (r_0 + c) < 1 - r_0'$, and we obtain a contradiction with the assumption $r_0 < r_0'$.

Next, we consider the case of a nonincreasing sequence $(t_i)_{i=1}^{\infty}$ in $(0, \infty)$ with $\lim_{i\to\infty} t_i = t_0$. Then $(r_i = 1 - \hat{M}(\mu, \nu, t_i))_{i=1}^{\infty}$ is a nondecreasing sequence in $(0, 1]$. Suppose that $r_0' = \lim_{i\to\infty} r_i < r_0$. There exists $c > 0$ such that $r_0' + 2c < r_0$.

Arguing as above we conclude that there exists $\eta > 0$ such that, for every $x, y \in \mathrm{supp}(\mu) \cup \mathrm{supp}(\nu)$, we have

$$|M(x, y, t_0 + \eta) - M(x, y, t_0)| < c.$$

There exists $i \in \mathbb{N}$ such that $t_i < t_0 + \eta$. Arguing as above, we conclude that

$$B(x, r_0', t_i) \cap (\mathrm{supp}(\mu) \cup \mathrm{supp}(\nu)) \subset B(x, r_0' + c, t_0)$$

and therefore

$$\mathcal{F}_{r_0',t_i}(\mathrm{supp}(\mu) \cup \mathrm{supp}(\nu)) \supset \mathcal{F}_{r_0'+c,t_i}(\mathrm{supp}(\mu) \cup \mathrm{supp}(\nu)).$$

This, in turn, implies that $\hat{M}(\mu, \nu, t_0) \geq 1 - (r_0' + c) > 1 - r_0$ and we obtain a contradiction.

Identifying every $x \in X$ with the Dirac measure δ_x, one may regard X as a subset of $I(X)$.

Proposition 1 *Let $(X, M, *)$ be a fuzzy ultrametric space. Then the fuzzy ultrametric $\hat{M}$ induces the fuzzy ultrametric M on $X \subset I(X)$.*

Proof Let $x, y \in X$. If $\hat{M}(\delta_x, \delta_y, t) = 1 - r$, then, for any $r' > r$, we have $1 = \delta_x(\chi_{B(x,r',t)}) = \delta_y(\chi_{B(x,r',t)})$ (here χ_A denotes the characteristic function of A), whence $y \in B(x, r', t)$ and therefore $M(x, y, t) > 1 - r'$. Passing to the limit as $r' \to r$, we see that $M(x, y, t) \geq \hat{M}(\delta_x, \delta_y, t)$.

On the other hand, if $r' < r$, then there is $z \in X$ such that $\delta_x(\chi_{B(z,r',t)}) \neq \delta_y(\chi_{B(z,r',t)})$. Without loss of generality, one may assume that $1 = \delta_x(\chi_{B(z,r',t)})$. Then $y \notin B(z, r', t) = B(x, r', t)$, whence $M(x, y, t) \leq 1 - r'$. Passing to the limit as $r' \to r$, we see that $M(x, y, t) \leq \hat{M}(\delta_x, \delta_y, t)$.

Proposition 2 *The set $I_\omega(X)$ is dense in $I(X)$ in the topology induced by the fuzzy ultrametric $\hat{M}$.*

Proof Let $\mu \in I(X)$, $r \in (0,1)$, $t > 0$. Consider an open cover $\mathcal{U} = \{B(x,r,t) \mid x \in \operatorname{supp}(\mu)\}$ of the set $\operatorname{supp}(\mu)$. Since the set $\operatorname{supp}(\mu)$ is compact, there exists a finite subcover $\{B(x_i,r,t) \mid i = 1,\dots,k\}$ of $\mathcal{U}$. Let $\lambda_i = \inf\{\mu(\varphi) \mid \varphi|B(x_i,r,t) = 0\}$. It is easy to see that $\oplus_{i=1}^k \lambda_i = 0$.

Let $\nu = \oplus_{i=1}^k \lambda_i \odot \delta_{x_i}$. Then $\nu \in I_\omega(X)$.

We are going to show that $\hat{M}(\mu,\nu,t) > 1-r$. To this end, consider $\varphi \in \mathcal{F}_{r,t}$. Then

$$\begin{aligned}\nu(\varphi) &= \oplus_{i=1}^k \lambda_i \odot \varphi(x_i)\\ &= \oplus_{i=1}^k \inf\{\mu(\psi) \mid \psi|B(x_i,r,t) = 0\} \odot \varphi(x_i)\\ &= \oplus_{i=1}^k \inf\{\mu(\psi) \mid \psi|B(x_i,r,t) = \varphi(x_i)\}\\ &=\mu(\oplus_{i=1}^k \inf\{\psi \mid \psi|B(x_i,r,t) = \varphi(x_i)\})\\ &=\mu(\varphi).\end{aligned}$$

We conclude that $\hat{M}(\mu,\nu,t) > 1-r$ and therefore $\nu \in B(\mu,r,t)$.

Proposition 3 *The map* $\operatorname{supp}\colon I(X) \to \exp X$ *is nonexpanding.*

Proof Let $\mu,\nu \in I(X)$ and $\hat{M}(\mu,\nu,t) > r_0$, where $r_0 \in (0,1)$. Then from the definition of $\hat{M}$ it follows that there exists $r < 1-r_0$ such that $\nu(\varphi) = \mu(\varphi)$, for all $\varphi \in \mathcal{F}_{r,t}$.

Suppose that $z \in \operatorname{supp}(\mu)$, then from the definition of support it follows that

$$\inf\{\mu(\varphi) \mid \varphi \in \mathcal{F}_{r,t},\ \varphi|B(z,r,t) = 0\} > -\infty.$$

Thus

$$\inf\{\nu(\varphi) \mid \varphi \in \mathcal{F}_{r,t},\ \varphi|B(z,r,t) = 0\} > -\infty$$

and therefore there exists $z' \in \operatorname{supp}(\nu)$ such that $z' \in B(z,r,t)$.

Therefore, $\operatorname{supp}(\mu) \subset B(\operatorname{supp}(\nu),r,t)$. One can similarly show that $\operatorname{supp}(\nu) \subset B(\operatorname{supp}(\mu),r,t)$.

This implies that

$$M_H(\operatorname{supp}(\mu),\operatorname{supp}(\nu),t) > 1-r > 1-(1-r_0) = r_0$$

and we conclude that the map supp is nonexpanding.

Proposition 4 *Let* $(X,M,*)$, $(X',M',*)$ *be fuzzy ultrametric spaces and let* $f\colon X \to X'$ *be a nonexpanding map. Then the map* $I(f)\colon I(X) \to I(X')$ *is also nonexpanding.*

Proof We are going to show that, for every $\mu,\nu \in I(X)$ and $t > 0$, if $\hat{M}(\mu,\nu,t) > \varrho$ then $\hat{M}'(I(f)(\mu),I(f)(\nu),t) > \varrho$.

Given $\hat{M}(\mu,\nu,t) > \varrho$, one can find $r \in (0,1)$ such that $1-r > \varrho$ and $\mu(B(x,r,t)) = \nu(B(x,r,t))$, for all $x \in X$. Since the map f is nonexpanding, we see that $f(B(x,r,t)) \subset B'(f(x),r,t)$ (by B' we denote the balls in X'), whence, by a result from [12], for every $y \in X'$, the set $f^{-1}(B'(y,r,t))$ is a union of disjoint balls of the form $B(z,r,t)$ in X. Therefore, for every $\varphi \in \mathcal{F}_{r,t}(X')$, we have $\varphi f \in \mathcal{F}_{r,t}(X)$. Therefore

$$I(f)(\mu)(\varphi) = \mu(f^{-1}(\varphi)) = \nu(\varphi f) = I(f)(\nu)(\varphi),$$

for all $\varphi \in \mathcal{F}_{r,t}(X')$, whence $\hat{M}'(I(f)(\mu),I(f)(\nu),t) > \varrho$ and the proposition follows.

It is easy to see that from Proposition 4 it follows that I is a functor from the category $\mathcal{FUMS}(*)$ to itself.

From Proposition 3 one can deduce that supp is a natural transformation of the functor I into the functor exp.

We are going to define a monad $\mathbb{I} = (I, \eta, \zeta)$ on the category $\mathcal{FUMS}(*)$. To this end, we define the map $\zeta_X : I2(X) \to I(X)$ as follows:

Let X be a fuzzy ultrametric space. Given $\varphi \in C(X)$, define $\bar{\varphi} \colon I(X) \to \mathbb{R}$ as follows: $\bar{\varphi}(\mu) = \mu(\varphi)$, $\mu \in I(X)$.

Given $M \in I2(X)$, define the map $\zeta_X(M) \colon C(X) \to \mathbb{R}$ as follows: $\zeta_X(M)(\varphi) = M(\bar{\varphi})$. Note that if $\varphi \in \mathcal{F}_{r,t}(X)$, then $\bar{\varphi} \in \mathcal{F}_{r,t}(I(X))$ and therefore ζ_X is a nonexpanding map.

Let also $\eta_X(x) = \delta_x$, for any $x \in X$.

6 Main result

Let X, Y be compact Hausdorff spaces. For any $x \in X$, denote by $i_x \colon Y \to X \times Y$ the map defined by the formula: $i_x(y) = (x, y)$, $y \in Y$. For any $\nu \in I(Y)$, define the map $g_\nu \colon X \to I(X \times Y)$ by the formula: $g_\nu(x) = I(i_x)(\nu)$, $x \in X$. Finally, given $\mu \in I(X)$, define

$$\mu \otimes \nu = \zeta_{X \times Y} I(g_\nu)(\mu) \in I(X \times Y).$$

The element $\mu \otimes \nu$ is called the *tensor product* of the elements μ and ν.

Proposition 1 *Let* $\mu = \oplus_{i=1}^n \alpha_i \odot \delta_{x_i} \in I_\omega(X)$, $\nu = \oplus_{j=1}^m \beta_j \odot \delta_{y_j} \in I_\omega(Y)$. *Then*

$$\mu \otimes \nu = \oplus_{i=1}^n \oplus_{j=1}^m (\alpha_i \odot \beta_j) \odot \delta_{(x_i, y_j)}.$$

Proof Straightforward.

Given $\mu_i \in I(X_i)$, $i = 1, \dots, n$, one can similarly define, by induction, the tensor product

$$\mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_n \in I(X_1) \times \dots \times I(X_n).$$

It easily follows from Proposition 1 that the definition fails to depend on the order of consequent multiplications.

It follows from general arguments that the maps

$$(\mu_1, \dots, \mu_n) \mapsto \mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_n \colon I(X)^n \to I(X^n)$$

determines a natural transformation of the functor $(-)^n I$ to the functor $I(-)^n$.

Define the natural transformation $\pi_G \colon (-)^n \to SP^n_G$ as follows:

$$\pi_{GX}(x_1, \dots, x_n) = [x_1, \dots, x_n].$$

The following statement concerns the idempotent measure monad on the categories of compact Hausdorff spaces, ultrametric spaces, and fuzzy ultrametric spaces.

Theorem 1 *There exists an extension of the G-symmetric power functor* SP^n_G *onto the Kleisli category of the monad* $\mathbb{I}$.

Proof Define the natural transformation $\xi\colon SP^n_G I \to ISP^n_G$ as follows:

$$\xi_X([\mu_1, \dots, \mu_n]) = I(\pi_G)(\mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_n).$$

We are going to show that the natural transformation ξ satisfies the properties from Theorem 1.

(i) Let $[x_1, \dots, x_n] \in SP^n_G X$, then

$$\begin{aligned} \xi_X SP^n_G(\eta_X)([x_1, \dots, x_n]) =& \xi_X([\delta_{x_1}, \dots, \delta_{x_n}]) = I(\pi_G)(\delta_{x_1} \otimes \dots \otimes \delta_{x_n}) \\ =& I(\pi_G)(\delta_{(x_1,\dots,x_n)}) = \delta_{[x_1,\dots,x_n]} = \eta_{SP^n_G X}([x_1, \dots, x_n]), \end{aligned}$$

i.e. $\xi_X SP^n_G(\eta_X) = \eta_{SP^n_G X}$.

(ii) Let $M_1, \dots, M_n \in I2(X)$, $M_i = \oplus \alpha_{ik} \odot \delta_{\mu_{ik}}$, where $\mu_{ik} \in I(X)$. Then

$$\begin{aligned} \mu_X I(\xi_X)\xi_{I(X)}([M_1, \dots, M_n]) =& \mu_X I(\xi_X) I(\pi_{GI(X)})(M_1 \otimes \dots \otimes M_n) \\ =& I(\xi_X) I(\pi_{GI(X)}) \left(\bigoplus (\alpha_{1i_1} \odot \dots \odot \alpha_{ni_n}) \odot \delta_{(\mu_{1i_1},\dots,\mu_{ni_n})} \right) \\ =& \mu_X I(\xi_X) \left(\bigoplus (\alpha_{1i_1} \odot \dots \odot \alpha_{ni_n}) \odot \delta_{[\mu_{1i_1},\dots,\mu_{ni_n}]} \right) \\ =& \mu_X \left(\bigoplus (\alpha_{1i_1} \odot \dots \odot \alpha_{ni_n}) \odot \delta_{\xi_X([\mu_{1i_1},\dots,\mu_{ni_n}])} \right) \\ =& \bigoplus (\alpha_{1i_1} \odot \dots \odot \alpha_{ni_n}) \odot \xi_X([\mu_{1i_1}, \dots, \mu_{ni_n}]). \end{aligned}$$

On the other hand,

$$\begin{aligned} \xi_X SP^n_G(\mu_X)([M_1, \dots, M_n]) =& \xi_X([\mu_X(M_1), \dots, \mu_X(M_n)]) \\ =& \xi_X([\oplus \alpha_{1i_1} \odot \mu_{1i_1}, \dots, \oplus \alpha_{1i_1} \odot \mu_{ni_n}]) \\ =& I(\pi_G)((\oplus \alpha_{1i_1} \odot \mu_{1i_1}) \otimes \dots \otimes (\oplus \alpha_{1i_1} \odot \mu_{ni_n})) \\ =& I(\pi_G) \left(\bigoplus (\alpha_{1i_1} \odot \dots \odot \alpha_{ni_n}) \odot (\mu_{1i_1} \otimes \dots \otimes \mu_{ni_n}) \right) \\ =& \bigoplus (\alpha_{1i_1} \odot \dots \odot \alpha_{ni_n}) \odot I(\pi_G)(\mu_{1i_1} \otimes \dots \otimes \mu_{ni_n}), \end{aligned}$$

i.e. the restrictions of the maps $\mu_X I(\xi_X)\xi_{I(X)}$ and $\xi_X SP^n_G(\mu_X)$ onto the dense set of points of finite supports are equal. We conclude that they are equal. Therefore the functor SP^n_G admits an extension to the Kleisli category of the monad $\mathbb{I}$.

7 Remarks and open questions

An analogous result for the probability measure monad in the category of compact Hausdorff spaces is stronger in the sense that it also contains the uniqueness of the extension. The corresponding question for the idempotent measures is open.

Another open question concerns possible counterparts of the results of this paper for the fuzzy metric spaces in the sense of [7].

References

1. Barr, M., Wells, Ch.: Toposes, triples and theories.- Berlin: Springer-Verlag, 1985.
2. Bazylevych, L., Repovš, D., Zarichnyi, M.: Spaces of idempotent measures of compact metric spaces, Topology and its Applications, **157** 136–144 (2010).
3. George, A., Veeramani, P.: On some results of analysis for fuzzy metric spaces, Fuzzy Sets and Systems, **90** , 365–368 (1997).
4. Gregori, V., Romaguera, S.: Some properties of fuzzy metric spaces, Fuzzy sets and systems, **115**, 485–489 (2000).
5. Gregori, V., Romaguera, S., Veeramani, P.: A note on intuitionistic fuzzy metric spaces, Chaos, Solitons & Fractals, **28**, Issue 4, 902–905 (2006).
6. Hubal, O., Zarichnyi, M.: Idempotent probability measures on ultrametric spaces, J. Math. Anal. Appl. **343**, 1052–1060 (2008).
7. Kramosil, O., Michalek, J.: Fuzzy metric and statistical metric spaces, Kybernetica, **11** 326–334(1975).
8. Maslov, V.P., Samborskii, S.N.: Idempotent Analysis, Adv. Soviet Math., vol. 13, Amer. Math. Soc., Providence, 1992.
9. Miheţ, D.: Fuzzy ψ-contractive mappings in non-Archimedean fuzzy metric spaces, Fuzzy Sets and Systems, **159**, Issue 6, 739–744 (2008).
10. Rodríguez-López, J., Romaguera, S.: The Hausdorff fuzzy metric on compact sets, Fuzzy Sets and Systems, **147**(2), 273–283 (2004).
11. Romaguera, S., Sapena, A. Tiradoi, P.: The Banach fixed point theorem in fuzzy quasi-metric spaces with application to the domain of words, Topology and its Applications, **154**, 2196–2203 (2007).
12. Savchenko, A., Zarichnyi, M.: Fuzzy ultrametrics on the set of probability measures. Topology, **48**, issues 2–4, 130–136 (2009).
13. Teleiko, A. and Zarichnyi, M.: Categorical topology of compact Hausdorff spaces.- Mathematical Studies: Monograph Series, Volume 5. - 200 pp.
14. Zarichnyi M. M.: Spaces and maps of idempotent measures, Izv. RAN. Ser. Mat. **74** , issue 3, 45–64 (2010).

Oleksandra Hubal'
Ivan Franko Lviv National University, Lviv, Ukraine.
E-mail: oleksandra@hubal.org

Aleksandr Savchenko
Kherson Agrarian University, Kherson, Ukraine
E-mail: savchenko1960@rambler.ru

Mykhailo Zarichnyi
Ivan Franko Lviv National University, Lviv, Ukraine.
E-mail: mzar@litech.lviv.ua

Proc. Intern. Geom. Center 2010 **3**(3) 34–39 $d\omega$

Про триангуляризацію матриць над областю головних ідеалів з мінімальними квадратичними многочленами

Володимир Прокіп

Аннотация Отримано необхідні та достатні триангуляризації діагоналізованих матриць над областю головних ідеалів з мінімальними квадратичними многочленами.

Ключові слова Область головних ідеалів, триангуляризація матриці

1 Вступ

Нехай R область головних ідеалів з одиницею $e \neq 0$, $U(\mathrm{R})$ мультиплікативна група області R. Введемо позначення: I_n – одинична матриця вимірності n; $0_{m,n}$ – нульова $(m \times n)$-матриця; $M_{m,n}(\mathrm{R})$ – множина $(m \times n)$-матриць над областю головних ідеалів R. Якщо $m = n$, то кільце $(n \times n)$-матриць над R позначатимемо через $M_n(\mathrm{R})$.

Кажуть, що пара матриць $A, B \in M_n(\mathrm{R})$ триангуляризуються, якщо вона перетворенням подібності зводиться до нижнього трикутного вигляду, тобто для матриць A і B існує матриця $U \in GL(n, \mathrm{R})$ така, що

$$UAU^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n,2} & \dots & \alpha_{n,n-1} & \alpha_{nn} \end{bmatrix} = T_A \qquad (1)$$

і

$$UBU^{-1} = \begin{bmatrix} \beta_{11} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \beta_{21} & \beta_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{n1} & \beta_{n,2} & \dots & \beta_{n,n-1} & \beta_{nn} \end{bmatrix} = T_B \qquad (2)$$

нижні трикутні матриці.

Очевидно, якщо пара матриць $A, B \in M_n(\mathrm{R})$ триангуляризується, то характеристичні многочлени A і B допускакають зображення у вигляді добутку лінійних множників, тобто

$$a(\lambda) = \det(I_n\lambda - A) = (\lambda - \alpha_1)^{k_1}(\lambda - \alpha_2)^{k_2} \dots (\lambda - \alpha_r)^{k_r},$$

$$b(\lambda) = \det(I_n\lambda - B) = (\lambda - \beta_1)^{k_1}(\lambda - \beta_2)^{k_2} \dots (\lambda - \beta_r)^{k_l},$$

де $\alpha_i, \beta_j \in \mathrm{R}$, $i = 1, 2, \dots, r$; і $j = 1, 2, \dots, l$. Легко переконатись в тому, що ці умови є лише необхідними для триангуляризації матриць над комутативними кільцями з одиницею (і над областю головних ідеалів R зокрема). Відзначимо, що задача про триангуляризацію пари матриць над полем досліджувалась в роботах [1] – [5]. Проте для матриць над комутативними кільцями ця задача, як і задача про спільні власні вектори, малодосліджена.

В даній роботі встановлено умови, за яких пара діагоналізованих матриць $A, B \in M_n(\mathrm{R})$ з мінімальними квадратичними многочленами, триангуляризується. Зауважимо, що здобуті результати справедливі для матриць над областями елементарних дільників. Крім цього, деякі з них можуть бути поширені для матриць над ID-кільцями [6], тобто над комутативними кільцями з одиницею, над якими ідемпотентна матриця діагоналізується.

2 Основні результати

Надалі через $\left[A, B\right]$ будемо позначати комутатор матриць $A, B \in M_n(\mathrm{R})$, тобто $\left[A, B\right] = AB - BA$. Враховуючи рівності (1), (2) та доведення необхідності теореми 3.1 із роботи [7] здобуваємо необхідну умову триангуляризації матриць над областю головних ідеалів, яку сформулюємо у вигляді.

Proposition 1 *Нехай матриці $A, B \in M_n(\mathrm{R})$ триангуляризуються. Тоді комутатор $\left[A, B\right]$ нільпотентна матриця.*

Доведення Нехай пара матриць $A, B \in M_n(\mathrm{R})$ триангуляризується. Враховуючи рівності (1) та (2) здобуваємо

$$\left[A, B\right] = U^{-1}\left(T_A T_B - T_B T_A\right)U = U^{-1}\left[T_A, T_B\right]U.$$

Оскільки $\left[T_A, T_B\right]$ нільпотентна матриця, то з останньої рівності випливає, що $\left[A, B\right]$ теж нільпотентна матриця. Твердження доведено.

Тепер опишемо класи матриць, для яких умова твердження 1 буде і достатньою. Надалі об'єктом нашого дослідження будуть пари матриць $A, B \in M_n(\mathrm{R})$ з характеристичними многочленами

$$a(\lambda) = \det(I_n\lambda - A) = (\lambda - \alpha_1)^{k_1}(\lambda - \alpha_2)^{n-k_1}, \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathrm{R},$$

та

$$b(\lambda) = \det(I_n\lambda - B) = (\lambda - \beta_1)^{k_2}(\lambda - \beta_2)^{n-k_2}, \quad \beta_1, \beta_2 \in \mathrm{R},$$

відповідно, для для яких

$$A - I_n\alpha_1 = 0_{n,n}\,(\bmod\,(\alpha_1 - \alpha_2)) \quad \text{і} \quad B - I_n\beta_1 = 0_{n,n}\,(\bmod\,(\beta_1 - \beta_2))\,.$$

Theorem 1 *Ідемпотентні матриці $A, B \in M_n(\mathrm{R})$ триангуляризуються тоді і тільки тоді, коли комутатор $\left[A, B\right]$ нільпотентна матриця.*

Доведення Необхідність випливає із твердження 1.

Достатність. Нехай комутатор $[A\,,B]$ нільпотентна матриця. Оскільки $\operatorname{rank}[A\,,B] < n$, то на підставі теореми 3.1 із роботи [7] для матриць A і B існує ненульовий спільний власний вектор $\bar{u} \in M_{1,n}(\mathrm{R})$, тобто $\bar{u}A = \bar{u}\alpha_1$ і $\bar{u}B = \bar{u}\beta_1$. Не обмежуючи загальності будемо вважати, що вектор $\bar{u}$ примітивний, тобто такий, що найбільший спільний дільник його елементів є дільником одиниці в R.

Отже, для матриць A і B існує матриця $U_1 = \begin{bmatrix} \bar{u} \\ * \end{bmatrix} \in GL(n,\mathrm{R})$, (першим рядком якої є спільний власний вектор $\bar{u}$) така, що

$$U_1AU_1^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} \alpha_1 & 0 \;\dots\; 0 \\ \hline * & A_1 \end{array}\right] \quad \text{і} \quad U_1BU_1^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} \beta_1 & 0 \;\dots\; 0 \\ \hline * & B_1 \end{array}\right],$$

де $\alpha_1, \beta_1 \in \{0, e\}$ і $A_1, B_1 \in M_{n-1}(\mathrm{R})$ – ідемпотентні матриці. Оскільки комутатор $[A, B]$ нільпотентна матриця, то очевидно, що

$$U_1\left[A, B\right]U_1^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \quad \dots \quad 0 \\ \hline * & \left[A_1, B_1\right] \end{array}\right]$$

теж нільпотентна матриця. З цієї рівності випливає, що комутатор $\left[A_1, B_1\right]$ нільпотентна матриця.

Оскільки A_1 та B_1 ідемпотенті матриці і $\operatorname{rank}\left[A_1, B_1\right] < n-1$, то згідно теореми 3.1 із [7] для матриць A_1 і B_1 існує спільний власний вектор. Враховуючи наведені вище міркування для матриць A_1 і B_1 існує матриця $T_1 \in GL(n-1,\mathrm{R})$ така, що

$$T_1A_1T_1^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} \alpha_2 & 0 \;\dots\; 0 \\ \hline * & A_2 \end{array}\right] \quad \text{і} \quad T_1B_1T_1^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} \beta_2 & 0 \;\dots\; 0 \\ \hline * & B_2 \end{array}\right],$$

де $\alpha_2, \beta_2 \in \{0, e\}$, $A_2, B_2 \in M_{n-2}(\mathrm{R})$. З наведеного вище випливає, що A_2 і B_2 ідемпотентні матриці, для яких комутатор $\left[A_2, B_2\right]$ нільпотентна матриця. Отже, матриці A_2 і B_2 мають спільний лівий власний вектор.

Покладемо $U_2 = \operatorname{diag}\left(e\,, T_1\right) \in GL(n,\mathrm{R})$. Тоді для оборотної матриці $U_{21} = U_2U_1$ виконуються наступні рівності:

$$U_{21}AU_{21}^{-1} = \left[\begin{array}{cc|c} \alpha_1 & 0 & 0 \;\dots\; 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_2 & 0 \;\dots\; 0 \\ \hline * & * & A_2 \end{array}\right]$$

і

$$U_{21}BU_{21}^{-1} = \left[\begin{array}{cc|c} \beta_1 & 0 & 0 \;\dots\; 0 \\ \beta_{21} & \beta_2 & 0 \;\dots\; 0 \\ \hline * & * & B_2 \end{array}\right].$$

Продовжуючи ці міркування далі, через скінченне число кроків (не більше ніж $n-1$) здобуваємо, що матриці A і B одним і тим же ж перетворенням подібності зводяться до трикутного вигляду, тобто існує матриця $U \in GL(n,\mathrm{R})$ така, що UAU^{-1} і UBU^{-1} – нижні трикутні матриці. Теорему доведено.

Із теореми теореми 1 отримуємо.

Corollary 1 *Нехай $A, B \in M_n(\mathrm{R})$ – матриці з мінімальними многочленами*

$$m_A(\lambda) = (\lambda - \alpha_1)(\lambda - \alpha_2) \quad \text{та} \quad m_B(\lambda) = (\lambda - \beta_1)(\lambda - \beta_2)$$

відповідно, де $\alpha_i, \beta_i \in \mathrm{R}$; $\alpha_2 - \alpha_1 \neq 0$; $\beta_2 - \beta_1 \neq 0$. Нехай, далі,

$$A - I_n\alpha_1 = 0_{n,n} \,(\bmod\,(\alpha_1 - \alpha_2)) \quad i \quad B - I_n\beta_1 = 0_{n,n} \,(\bmod\,(\beta_1 - \beta_2))\,.$$

Матриці A і B триангуляризуються тоді і тільки тоді, коли комутатор $\big[A, B\big]$ нільпотентна матриця.

Доведення Так як для матриць $A, B \in M_n(\mathrm{R})$ виконується

$$A - I_n\alpha_1 = 0_{n,n} \,(\bmod\,(\alpha_1 - \alpha_2)) \quad \text{і} \quad B - I_n\beta_1 = 0_{n,n} \,(\bmod\,(\beta_1 - \beta_2))\,,$$

то згідно теореми 2.1 із [7] матриці A і B діагоналізуються. Згідно наслідку 2.2 із [7] матриці A і B допускають зображення

$$A = I_n\alpha_1 + (\alpha_2 - \alpha_1)P \quad \text{і} \quad B = I_n\beta_1 + (\beta_2 - \beta_1)Q,$$

де $P, Q \in M_n(\mathrm{R})$ – ідемпотентні матриці.

Очевидно, що матриці A і B триангуляризуються тоді і тільки тоді, коли триангуляризуються матриці P і Q. Легко перевірити, що $\big[A, B\big] = (\alpha_2 - \alpha_1)(\beta_2 - \beta_1)\big[P, Q\big]$. Отже, згідно теореми 1 комутатор $\big[A, B\big]$ нільпотентна матриця тоді і тільки тоді, коли $\big[P, Q\big]$ нільпотентна матриця. Наслідок доведено.

Доведення наступної теореми базується на лемі, яку доведемо нижче.

Lemma 1 *Нехай*

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n-1,1} & \alpha_{n-1,2} & \dots & \alpha_{n-1} & 0 \\ \alpha_{n,1} & \alpha_{n,2} & \dots & \alpha_{n,n-1} & \alpha_n \end{bmatrix} \in M_n(\mathrm{R})$$

– нижня трикутна ідемпотентна матриця, тобто $A^2 = A$. Для матриці A існує нижня трикутна оборотна $(n \times n)$-матриця T така, що $TAT^{-1} = \mathrm{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$.

Доведення Доведення леми проведемо методом математичної індукції. Доведемо справедливість леми для $n = 2$. В цьому випадку матриця A може бути однією з матриць виду:

$$A = \mathrm{O}, \qquad A = I_2, \qquad A = \begin{bmatrix} e & 0 \\ \alpha_{21} & 0 \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \alpha_{21} & e \end{bmatrix}.$$

Очевидно, якщо $A = \mathrm{O}$ або $A = I_2$, то $T = I_2$. Припустимо, що $A = \begin{bmatrix} e & 0 \\ \alpha_{21} & 0 \end{bmatrix}$. Тоді для матриці $T_1 = \begin{bmatrix} e & 0 \\ -\alpha_{21} & e \end{bmatrix}$ справедлива рівність

$$T_1AT_1^{-1} = \mathrm{diag}(e, 0).$$

Якщо ж $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \alpha_{21} & e \end{bmatrix}$, то для матриці $T_2 = \begin{bmatrix} e & 0 \\ \alpha_{21} & e \end{bmatrix}$ отримуємо

$$T_2 A T_2^{-1} = \mathrm{diag}(0,\, e).$$

Припустимо, що лема справедлива для всіх $k = n-1$. Доведемо справедливість леми для $k = n$. Тоді для підматриці

$$A_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n-1,1} & \alpha_{n-1,2} & \dots & \alpha_{n-1,n-2} & \alpha_{n-1} \end{bmatrix} \in M_{n-1}(\mathrm{R})$$

матриці $A \in M_n(\mathrm{R})$ існує існує нижня трикутна оборотна матриця $T_0 \in GL(n-1, \mathrm{R})$ така, що

$$T_0 A_1 T_0^{-1} = \mathrm{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}) = D.$$

Отже, для матриці $T_1 = \mathrm{diag}\left(T_0\ e\right) \in GL(n, \mathrm{R})$ справедлива рівність

$$T_1 A T_1^{-1} = B = \begin{bmatrix} D & 0 \\ \bar{b} & \alpha_n \end{bmatrix},$$

де $\bar{b} \in M_{1,n-1}(\mathrm{R})$. Очевидно, що $B^2 = B$.

Нехай $\alpha_n = e$. Тоді із рівності $B^2 = B$ випливає $\bar{b}D = \bar{0}$. Поклавши $T_2 = \begin{bmatrix} I_{n-1} & 0 \\ \bar{b} & e \end{bmatrix}$ отримуємо

$$T_2 B T_2^{-1} = \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & e \end{bmatrix} = \mathrm{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n).$$

Якщо ж $\alpha_n = 0$, то з рівності $B^2 = B$ випливає $\bar{b}D = \bar{b}$. Отже, для матриці $T_3 = \begin{bmatrix} I_{n-1} & 0 \\ -\bar{b} & e \end{bmatrix}$ справедлива рівність

$$T_3 B T_3^{-1} = \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathrm{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n).$$

Лему доведено.

Theorem 2 *Нехай $A, B \in M_n(\mathrm{R})$ – ідемпотентні матриці. Якщо комутатор $[A, B]$ нільпотентна матриця, то для матриць A і B існує матриця $V \in GL(n, \mathrm{R})$ така, що VAV^{-1} діагональна матриця і VBV^{-1} тижня трикутна матриця, тобто*

$$VAV^{-1} = \mathrm{diag}\,(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n); \qquad \alpha_i \in \{0, e\},$$

і

$$VBV^{-1} = \begin{bmatrix} \beta_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \beta_{21} & \beta_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \dots & \beta_{n,n-1} & \beta_n \end{bmatrix}, \qquad \beta_j \in \{0, e\}.$$

Доведення Нехай $A, B \in M_n(\mathrm{R})$ – ідемпотентні матриці. Так як комутатор $[A, B]$ нільпотентна матриця, то згідно теореми 1 для матриць A і B існує матриця $U \in GL(n, \mathrm{R})$ така, що $UAU^{-1} = C$ і $UBU^{-1} = D$ нижні трикутні ідемпотентні матриці. На підставі леми 1 для матриці C існує нижня трикутна оборотна $(n \times n)$-матриця T така, що

$$TCT^{-1} = \operatorname{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n).$$

Оскільки T нижня трикутна оборотна матриця, то очевидно, що

$$TUBU^{-1}T^{-1} = TDT^{-1}$$

також нижня трикутна матриця. Поклавши $V = TU$ здобуваємо доведення теореми.

Приймаючи до уваги доведення наслідоку 1 із теореми 2 отримуємо твердження, яке сформулюємо у вигляді.

Corollary 2 *Нехай* $A, B \in M_n(\mathrm{R})$ *– матриці з мінімальними многочленами*

$$m_A(\lambda) = (\lambda - \alpha_1)(\lambda - \alpha_2), \quad \alpha_2 - \alpha_1 \neq 0,$$

та

$$m_B(\lambda) = (\lambda - \beta_1)(\lambda - \beta_2), \quad \beta_2 - \beta_1 \neq 0,$$

відповідно, де $\alpha_i, \beta_i \in \mathrm{R}, i = 1, 2$. *Нехай, далі,*

$$A - I_n\alpha_1 = 0_{n,n} \left(\bmod\, (\alpha_1 - \alpha_2)\right) \quad i \quad B - I_n\beta_1 = 0_{n,n} \left(\bmod\, (\beta_1 - \beta_2)\right).$$

Якщо комутатор $[A, B]$ *нільпотентна матриця, то для матриць* A *і* B *існує матриця* $V \in GL(n, \mathrm{R})$ *така, що*

$$VAV^{-1} = \operatorname{diag}(\alpha_{11}, \alpha_{22}, \ldots, \alpha_{nn}); \qquad \alpha_{ii} \in \{\alpha_1, \alpha_2\},$$

і

$$VBV^{-1} = \begin{bmatrix} \beta_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \beta_{21} & \beta_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \ldots & \beta_{n,n-1} & \beta_{nn} \end{bmatrix}, \qquad \beta_{jj} \in \{\beta_1, \beta_2\}.$$

Література

1. N.H. McCoy, *On the characteristic roots of matrix polynomials* // Bull. Amer. Math. Soc. – 1936, – **V.42**, N 8. – P.592-600.
2. T.J. Laffey, *Simultaneous triangularization of matrices – low rank cases and the nonderogatory case* // Linear and Multilinear Algebra. – 1978, – **V.6**. – P.269–305.
3. G.Szep, *Simultaneous triangularization of projector matrices* // Acta Math. Hung. – 1986, – **V.48**, N 3-4. – P.285-288.
4. H.Bart and R.A.Zuidwijk, *Simultaneous reduction to triangular form after extension with zeros* // Linear Algebra and Appl. – 1998, – **V. 281**. – P.105–135.
5. Джордж А., Икрамов Х.И., *Замечание о канонической форме пары ортопроекторов* // Записки научных семинаров ПОМИ. 2004, – **T.309**. – С.17–22.
6. A. Steger, *Diagonability of idempotent matrices* // Pacific Journal of Math. – 1966, – **V.19**, N3. – P.535-542.
7. Прокіп В.М. *Діагоналізація матриць над областю головних ідеалів з мінімальним многочленом* $m(\lambda) = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta), \alpha \neq \beta$ // Укр. мат. вісник – 2010, – **7**, № 2. – С.212–219.

Proc. Intern. Geom. Center 2010 **3**(3) 40–47 *dω*

Топології на множині фактороб'єктів компактного гаусдорфового простору

Катерина Миколаївна Копорх

Аннотация У статті розглянуто різні топологізації множини $\Phi(X)$ усіх класів еквівалентності сюр'єктивних відображень. Доведено, що для введених топологій τ^{cf}, τ^{fo}, τ^{oo} конструкція Φ визначає контраваріантний функтор з категорії Comp^0 компактних просторів і відкритих відображень у категорію Top топологічних просторів і неперервних відображень. Встановлено співвідношення між введеними топологіями.

Ключові слова топологія, відображення

1 Вступ

У праці (1) Є. В. Щепін запровадив для кожного компактного гаусдорфового простору X множину $\Phi(X)$ усіх класів еквівалентності сюр'єктивних відображень, означених на X, в категорії Comp компактних гаусдорфових просторів. Конструкція $\Phi(X)$ відігравала важливу роль у дослідженні неметризовних компактів методами обернених систем (спектрів). З категорної точки зору множна $\Phi(X)$ є множиною фактор-об'єктів елемента X і тому є дуальною до його множини підоб'єктів. Остання позначається $\exp X$, як відомо, допускає природну топологізацію. Найчастіше на множині $\exp X$ розглядають топологію Вієторіса, базою якої є множина вигляду

$$\langle U_1, U_2, \dots, U_n\rangle = \{A \in \exp X \mid A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i, A \cap U_i \neq \emptyset \text{ для кожного } i = 1, 2, \dots, n\}$$

де $n \in \mathbb{N}$ і множини $U_1, U_2, \dots U_n$ пробігають топологію простору X.

Одержаний топологічний простір $\exp X$ (гіперпростір простору X) знаходить численні застосування у різноманітних областях математики, зокрема, в багатозначному аналізі.

Нижче ми запроваджуємо деякі топології в множину $\Phi(X)$; їх можна вважати аналогами відповідних топологій в функціональних просторах.

2 Постановка задачі

Нехай X — компактний гаусдорфовий простір.

Розглянемо клас всіх неперервних сюр'єктивних відображень простору X. Два відображення $f_1 \colon X \twoheadrightarrow Z_1$ і $f_2 \colon X \twoheadrightarrow Z_2$, називаємо еквівалентними (позначимо $f_1 \sim f_2$), якщо існує гомеоморфізм $h \colon Z_1 \to Z_2$ такий, що $f_2 = h \circ f_1$, тобто діаграма

$$X[rr]^{-} f_1[dd]_{f_2} Z_1[lldd]^{h}\ Z_2$$

комутативна.

Таким чином, клас неперервних сюр'єктивних відображень розіб'ється на класи еквівалентних відображень. Через $[f]$ позначаємо клас еквівалентності, що містить факторвідображення f. *Фактороб'єктом* простору X назвемо клас еквівалентних відображень. Множину всіх фактороб'єктів компактного гаусдорфового простору X позначаємо

$$\Phi(X) = \{[f] \mid f \colon X \longrightarrow Z \text{ де } f - \text{ сюр'єктивне відображення,}$$
$$X, Z - \text{ компактні гаусдорфові простори } \}.$$

Розглянемо ряд топологій на множині $\Phi(X)$, встановимо співвідношення між введеними топологіями. І дослідимо функторіальність конструкції $\Phi(X)$ в кожній з запропонованих топологій.

Кожному компактному гаусдорфовому простору X покладемо у відповідність простір $(\Phi(X), \tau)$. Для кожного неперервного відображення $f \colon X \longrightarrow Y$ визначимо $\Phi(f) \colon \Phi(Y) \longrightarrow \Phi(X)$ задане формулою $\Phi(f)([g]) = [g \circ f] = [h]$, де $[g] \in \Phi(Y)$ і $[h] \in \Phi(X)$. Якщо відображення $\Phi(f) \colon \Phi(Y) \longrightarrow \Phi(X)$ неперервне, то конструкція Φ визначає контраваріантний функтор з категорії **Comp** в категорію **Top**.

3 Коскінченна топологія

Якщо T — скінчений дискретний простір, то вважаємо, що множина $\Phi(T)$, яка також є скінченною, наділена дискретною топологією. Для довільного X введемо на множині $\Phi(X)$ найслабшу топологію τ, при якій для кожного вкладення $f \colon T \to X$ скінченного топологічного простору T в X відображення $\Phi(f)$ є неперервним. Базу такої топології утворюють множини вигляду

$$O([h]; x_1, y_1, x_2, y_2, ..., x_n, y_n) = \{[h'] \in \Phi(X) \mid$$
$$h(x_i) = h(y_i) \Leftrightarrow h'(x_i) = h'(y_i)\}$$

де $[h] \in \Phi(X)$ і $x_1, y_1, x_2, y_2, ...x_n, y_n \in X$.

Отриману топологію τ^{cf} назвемо коскінченною. Утворений топологічний простір позначаємо $\Phi^{cf}(X)$.

Теорема 1 *Нехай $f \colon X \longrightarrow Y$ – деяке неперервне відображення. Тоді відображення $\Phi(f) \colon \Phi^{cf}(Y) \longrightarrow \Phi^{cf}(X)$ неперервне.*

Доведення Нехай $\Phi(f)([h]) = [h \circ f] = [g]$ де $[h] \in \Phi(Y)$ а $[g] \in \Phi(X)$. Розглянемо деякий окіл елемента $[g] \in \Phi(X)$, а саме

$$O([g]; x_1, x_1', x_2, x_2', ..., x_n, x_n') =$$
$$\{[\varphi] \in \Phi(X) | g(x_i) = g(x_i') \Leftrightarrow \varphi(x_i) = \varphi(x_i')\}$$
$$\text{де } x_1, x_1', x_2, x_2', ..., x_n, x_n' \in X.$$

Нехай $y_i = f(x_i)$ і $y'_i = f(x'_i)$ — елементи простору Y. Розглянемо окіл

$$O([h]; y_1, y'_1, y_2, y'_2, ..., y_n, y'_n) = \\ \{[\psi] \in \Phi(Y) | h(y_i) = h(y'_i) \Leftrightarrow \psi(y_i) = \psi(y'_i)\}$$

елемента $[h]$. Виберемо $[\psi] \in O([h]; y_1, y'_1, y_2, y'_2, ..., y_n, y'_n)$, тоді з рівності $\psi(y_i) = \psi(y'_i)$ випливає, що $h(y_i) = h(y'_i)$ для кожного i, $1 \leqslant i \leqslant n$. Оскільки $y_i = f(x_i)$ і $y'_i = f(x'_i)$, одержуємо, що з $\psi(f(x_i)) = \psi(f(x'_i))$ випливає $h(f(x_i)) = h(f(x'_i))$, а з рівності $(\psi \circ f)(x_i) = (\psi \circ f)(x'_i)$ маємо $(h \circ f)(x_i) = (h \circ f)(x'_i)$, тобто $g(x_i) = g(x'_i)$ для кожного i, $1 \leqslant i \leqslant n$. Маємо $[\psi \circ f] \in O([g], x_1, x'_1, x_2, x'_2, ..., x_n, x'_n)$. Оскільки елемент $[\psi]$ вибирався довільно, то має місце включення

$$\Phi(f)(O([h]; y_1, y'_1, y_2, y'_2, ..., y_n, y'_n)) \subset O([g], x_1, x'_1, x_2, x'_2, ..., x_n, x'_n),$$

що й показує неперервність відображення $\Phi(f)$.

4 Скінченно-відкрита топологія

Нехай U_i — відкриті підмножини в X і $x_i \in X$ для всіх $i = 1, 2, \dots n$ де $n \in \mathbb{N}$. На множині $\Phi(X)$ розглянемо сім'ю відкритих множин

$$O([f], x_1, U_1, x_2, U_2, ..., x_n, U_n) = \{[g] \in \Phi(X) \mid \exists u_i \in U_i \colon \\ f(x_i) = f(u_i) \Rightarrow \exists u'_i \in U_i \colon g(x_i) = g(u'_i) \text{ для всіх } i = 1, 2, ..., n\},$$

де $n \in \mathbb{N}$. Покажемо, що така сім'я множин утворює базу деякої топології в $\Phi(X)$. Нехай $[h] \in \Phi(X)$, і

$$[h] \in O([f], x_1, U_1, x_2, U_2, ..., x_m, U_m) \cap O([g], y_1, V_1, y_2, V_2, ..., y_n, V_n).$$

Розглянемо окіл

$$O([h], x_1, U_1, x_2, U_2, ..., x_m, U_m, y_1, V_1, y_2, V_2, ..., y_n, V_n)$$

елемента $[h]$.

Оскільки $[h] \in O([f], x_1, U_1, x_2, U_2, ..., x_m, U_m)$ то з рівності $f(x_i) = f(u_i)$ випливає існування елемента $u'_i \in U_i$ такого, що $h(x_i) = h(u'_i)$. Нехай

$$[p] \in O([h], x_1, U_1, x_2, U_2, ..., x_m, U_m, y_1, V_1, y_2, V_2, ..., y_n, V_n)$$

тоді, якщо зайдеться елемент $u'_i \in U_i$ такий, що $h(x_i) = h(u'_i)$, то існує елемент $u''_i \in U_i$ такий, що $p(x_i) = p(u''_i)$. Тобто

$$[p] \in O([f], x_1, U_1, x_2, U_2, ..., x_m, U_m).$$

Оскільки $[h] \in O([g], y_1, V_1, y_2, V_2, ..., y_m, V_m)$, тоді з $g(y_i) = g(v_i)$ випливає існування елемента $v_i \in V_i$ такого, що $h(y_i) = h(v'_i)$. Тоді з включення

$$[p] \in O([h], x_1, U_1, x_2, U_2, ..., x_m, U_m, y_1, V_1, y_2, V_2, ..., y_n, V_n)$$

випливає, що якщо існує елемент $v'_i \in V_i$ такий, що $h(y_i) = h(v'_i)$, то зайдеться елемент $v''{}_i \in V_i$ такий, що $p(y_i) = p(v''_i)$. Тобто

$$[p] \in O([g], y_1, V_1, y_2, V_2, ..., y_m, V_m).$$

Іншими словами

$$[p] \in O([f], x_1, U_1, x_2, U_2, ..., x_m, U_m) \cap O([g], y_1, V_1, y_2, V_2, ..., y_m, V_m).$$

Отже, має місце включення

$$O([h], x_1, U_1, x_2, U_2, ..., x_m, U_m, y_1, V_1, y_2, V_2, ..., y_n, V_n) \subset \\ O([f], x_1, U_1, x_2, U_2, ..., x_m, U_m) \cap O([g], y_1, V_1, y_2, V_2, ..., y_m, V_m).$$

Топологію τ^{fo} з описаною вище базою на множині $\Phi(X)$ називаємо скінченно-відкритою топологією і утворений топологічний простір позначаємо $\Phi^{fo}(X)$.

Теорема 2 *Нехай $f\colon X \longrightarrow Y$ – відкрите неперервне відображення. Тоді відображення $\Phi(f)\colon \Phi^{fo}(Y) \longrightarrow \Phi^{fo}(X)$ неперервне.*

Доведення Нехай $\Phi(f)([h]) = [h \circ f] = [g]$, де $[h] \in \Phi(Y)$, а $[g] \in \Phi(X)$. Розглянемо окіл

$$O([g]; x_1, U_1, x_2, U_2, ..., x_n, U_n) = \{[\varphi] \in \Phi(X) \mid \exists u_i \in U_i\colon g(x_i) = \\ g(u_i) \Rightarrow \exists u_i' \in U_i\colon \varphi(x_i) = \varphi(u_i'); \text{ де } x_i \in X, \\ U_i \text{ — відкриті підмножини простору } X, \text{ для всіх } i = 1, 2, ..., n\},$$

де $n \in \mathbb{N}$.

Нехай $y_i = f(x_i)$ — елементи простору Y і $V_i = f(U_i)$ для кожного $i = 1, 2, ..., n$. Розглянемо окіл

$$O([h]; y_1, V_1, y_2, V_2, ..., y_n, V_n) = \{[\psi] \in \Phi(Y) \mid \exists v_i \in V_i\colon h(y_i) = h(v_i) \Rightarrow \\ \exists v_i' \in V_i\colon \psi(y_i) = \psi(v_i')\}.$$

Виберемо довільно елемент $[\psi] \in O([h]; y_1, V_1, y_2, V_2, ..., y_n, V_n)$, тоді з рівності $h(y_i) = h(v_i)$ випливає, що $\psi(y_i) = \psi(v_i')$ для кожного i, $1 \leqslant i \leqslant n$. Оскільки $y_i = f(x_i)$ і $v_i' = f(u_i')$, $v_i = f(u_i)$, одержуємо, що з $h(f(x_i)) = h(f(u_i))$ випливає $\psi(f(x_i)) = \psi(f(u_i'))$, а з рівності $(h \circ f)(x_i) = (h \circ f)(u_i)$ випливає $(\psi \circ f)(x_i) = (\psi \circ f)(u_i')$, таким чином з рівності $g(x_i) = g(u_i)$ випливає $(\psi \circ f)(x_i) = (\psi \circ f)(u_i')$ для кожного i, $1 \leqslant i \leqslant n$. Маємо

$$[\psi \circ f] \in O([g], x_1, U_1, x_2, U_2, ..., x_n, U_n).$$

Оскільки елемент $[\psi]$ вибирався довільно, то має місце включення

$$\Phi(f)(O([h]; y_1, V_1, y_2, V_2, ..., y_n, V_n)) \subset O([g], x_1, U_1, x_2, U_2, ..., x_n, U_n),$$

що й показує неперервність відображення $\Phi(f)$.

5 Відкрито-відкрита топологія

На множині $\Phi(X)$ розглянемо топологію, породжену сім'єю відкритих підмножин

$$O([f], U_1, U_1', U_2, U_2', ..., U_n, U_n') = \{[g] \in \Phi(X) \mid$$
$$\exists x_i \in U_i, x_i' \in U_i' \colon f(x_i) = f(x_i') \Rightarrow \exists y_i \in U_i, y_i' \in U_i' \colon g(y_i) = g(y_i')$$
$$\text{де } U_i, U_i' \text{ — відкриті підмножини в } X, \text{ для всіх } i = 1, 2, ..., n, \}$$

де $n \in \mathbb{N}$.

Покажемо, що така сім'я множин утворює базу деякої топології в $\Phi(X)$. Нехай $[h] \in \Phi(X)$ і

$$[h] \in O([f], U_1, U_1', U_2, U_2', ..., U_m, U_m') \cap O([g], V_1, V_1', V_2, V_2', ..., V_n, V_n').$$

Розглянемо окіл

$$O([h], U_1, U_1', U_2, U_2', ..., U_m, U_m', V_1, V_1', V_2, V_2', ..., V_n, V_n')$$

елемента $[h]$. Виберемо довільний елемент $[p]$ цього околу. За припущенням

$$[h] \in O([f], U_1, U_1', U_2, U_2', ..., U_m, U_m'),$$

тоді з рівності $f(x_i) = f(x_i')$ випливає існування елементів $t_i \in U_i$ і $t_i' \in U_i'$ таких, що $h(t_i) = h(t_i')$. Тоді

$$[p] \in O([h], x_1, U_1, x_2, U_2, ..., x_m, U_m, y_1, V_1, y_2, V_2, ..., y_n, V_n)$$

означає, що: якщо $h(t_i) = h(t_i')$, то існують $u_i \in U_i$ і $u_i' \in U_i'$ такі, що $p(u_i) = p(u_i')$. Отже, з рівності $f(x_i) = f(x_i')$ випливає $p(u_i) = p(u_i')$, тобто

$$[p] \in O([f], U_1, U_1', U_2, U_2', ..., U_m, U_m').$$

Далі, оскільки

$$[h] \in O([g], V_1, V_1', V_2, V_2', ..., V_n, V_n'),$$

то з рівності $g(y_i) = g(y_i')$, де $y_i \in V_i$ і $y_i' \in V_i'$, випливає існування елементів $z_i \in V_i$ і $z_i' \in V_i'$ таких, що $h(z_i) = h(z_i')$. Тоді

$$[p] \in O([h], U_1, U_1', U_2, U_2', ..., U_m, U_m', V_1, V_1', V_2, V_2', ..., V_n, V_n')$$

означає, що: якщо $h(z_i) = h(z_i')$, то існують елементи $v_i \in V_i$ і $v_i' \in V_i'$ такі, що $p(v_i) = p(v_i')$. Тобто

$$[p] \in O([g], V_1, V_1', V_2, V_2', ..., V_m, V_m').$$

Оскільки

$$[p] \in O([f], U_1, U_1', U_2, U_2', ..., U_m, U_m'),$$

то $[p]$ міститься в перетині цих множин, отже,

$$O([h], U_1, U_1', U_2, U_2', ..., U_m, U_m', V_1, V_1', V_2, V_2', \ldots, V_n, V_n') \subset$$
$$O([f], U_1, U_1', U_2, U_2', \ldots, U_m, U_m') \cap O([g], V_1, V_1', V_2, V_2', \ldots, V_m, V_m').$$

Топологію з цією базою називаємо відкрито-відкритою топологією і позначаємо τ^{oo} а утворений топологічний простір позначаємо $\Phi^{oo}(X)$.

Теорема 3 *Нехай $f\colon X \to Y$ відкрите неперервне відображення. Тоді відображення $\Phi(f)\colon \Phi(Y) \to \Phi(X)$ неперервне.*

Доведення Нехай $\Phi(f)([h]) = [h \circ f] = [g]$ де $[h] \in \Phi(Y)$ і $[g] \in \Phi(X)$. Розглянемо деякий базовий окіл елемента $[g] \in \Phi(X)$, а саме

$$O([g], U_1, U_1', U_2, U_2', \dots, U_n, U_n') = \{[\varphi] \in \Phi(X) \mid$$
$$\exists x_i \in U_i, x_i' \in U_i'\colon g(x_i) = g(x_i') \Rightarrow \exists u_i \in U_i, u_i' \in U_i'\colon \varphi(u_i) = \varphi(u_i')$$
$$\text{де } U_1, U_1', U_2U_2', \dots, U_n, U_n' \text{ — відкриті підмножини простору } X, \}$$

де $n \in \mathbb{N}$.

Покладемо $V_i = f(U_i)$ і $V_i' = f(U_i')$ — відкриті підмножини простору Y для кожного $i = 1, 2, \dots, n$. Розглянемо окіл

$$O([h], V_1, V_1', V_2, V_2', \dots, V_n, V_n') = \{[\psi] \in \Phi(Y) \mid \exists y_i \in V_i, y_i' \in V_i'\colon$$
$$h(y_i) = h(y_i') \Rightarrow \exists v_i \in V_i, v_i' \in V_i'\colon \psi(v_i) = \psi(v_i')\}$$

елемента $[h]$. Нехай

$$[\psi] \in O([h]; V_1, V_1', V_2, V_2', ..., V_n, V_n'),$$

тоді з $h(y_i) = h(y_i')$ випливає, що $\psi(v_i) = \psi(v_i')$ для кожного i, де $1 \leqslant i \leqslant n$. Оскільки $y_i = f(x_i)$, $y_i' = f(x_i')$ і $v_i' = f(u_i')$, $v_i = f(u_i)$ тоді з рівності $h(f(x_i)) = h(f(x_i'))$ випливає $\psi(f(u_i)) = \psi(f(u_i'))$, а з $(h \circ f)(x_i) = (h \circ f)(x_i')$ маємо $(\psi \circ f)(u_i) = (\psi \circ f)(u_i')$. Тобто з $g(x_i) = g(x_i')$ випливає $(\psi \circ f)(u_i) = (\psi \circ f)(u_i')$ для кожного i де $1 \leqslant i \leqslant n$. Маємо

$$[\psi \circ f] \in O([g], U_1, U_1', U_2, U_2', ..., U_n, U_n').$$

Оскільки елемент $[\psi]$ вибирався довільно, то має місце включення

$$\Phi(f)(O([h]; V_1, V_1', V_2, V_2', ..., V_n, V')) \subset O([g], U_1, U_1', U_2, U_2', ..., U_n, U_n').$$

6 Істотність вимоги відкритого відображення в теоремах 2 і 3.

Розглянемо

Пример 1 *Нехай $X = Y = I = [0;1]$. Розглянемо неперервне, сюр'єктивне відображення $f\colon X \longrightarrow Y$, означене формулою:*

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{якщо } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}; \\ 1, & \text{якщо } \frac{1}{2} < x \leqslant 1. \end{cases}$$

Розглянемо відображення $\Phi(f)\colon \Phi(Y) \longrightarrow \Phi(X)$, яке діє таким чином: $\Phi(f)([\psi]) = [\psi \circ f] = [\varphi]$, де $[\psi] \in \Phi(Y)$ і $[\varphi] \in \Phi(X)$.

Нехай $x \in (\frac{1}{2}, 1)$ і нехай U — відкрита підмножина інтервалу $(\frac{1}{2}, 1)$. Означимо окіл $O([\varphi], x, U)$ елемента $[\varphi] \in \Phi(X)$:

$$O([\varphi], x, U) = \{[\widehat{\varphi}] \in \Phi(X) \mid$$
$$\exists u \in U\colon \varphi(x) = \varphi(u) \Leftrightarrow \exists u' \in U\colon \widehat{\varphi}(x) = \widehat{\varphi}(u')\}.$$

Покажемо, що не існує околу $O([\psi], y, V) \subset \Phi(Y)$ елемента $[\psi] \in \Phi(Y)$ такого, щоб $\Phi(f)(O([\psi], y, V)) \subset O([\varphi], x, U)$. Звідси буде випливати, що $\Phi(f)$ — розривне відображення.

Розглянемо множину

$$O([\psi], y, V) = \{[\widehat{\psi}] \in \Phi(Y) \mid \exists v \in V : \psi(y) = \psi(v) \Leftrightarrow \exists v' \in V : \widehat{\psi}(y) = \widehat{\psi}(v')\},$$

де $y = f(x)$, і $V = f(U)$. Тоді $\Phi(f)(O([\psi], y, V)) \subset O([\varphi], x, U)$. Але $f(U) = 1$, тобто $V = \{1\}$, звідси

$$v = v' = v'' = \cdots = v^{(n)} = 1,$$

далі $\psi(y) = \psi(v)$ тоді і тільки тоді коли $\hat{\psi}(y) = \hat{\psi}(v') = \hat{\psi}(v)$, отже, отримаємо, що $\hat{\psi} \in [\psi]$, тобто множина $O([\psi], y, V)$ одноточкова, а значить не є околом елемента $[\psi]$. Що і треба було показати.

Таким чином, для топологій τ^{cf}, τ^{fo}, τ^{oo} конструкція Φ визначає контраваріантний функтор з категорії Comp^0 компактних просторів і відкритих відображень у категорію Top топологічних просторів і неперервних відображень.

7 Порівняння топологій

Встановимо співвідношення між топологіями τ^{cf}, τ^{fo} і τ^{oo} на множині $\Phi(X)$.

Предложение 1 *Коскінченна топологія сильніша, ніж скінченно-відкрита топологія: $\tau^{fo} \prec \tau^{cf}$.*

Доведення Нехай $[f]$ — довільний елемент множини $\Phi(X)$. Розглянемо елемент

$$\begin{aligned} &M([f], x_1, U_1, x_2, U_2, \ldots, x_n, U_n) = \{[g] \in \Phi(X) \mid \exists u_i \in U_i : \\ &f(x_i) = f(u_i) \Rightarrow \exists y_i \in U_i : g(x_i) = g(y_i) \text{ для кожного } i = 1, 2, ..., n, \} \end{aligned}$$

де $n \in \mathbb{N}$, бази скінченно-відкритої топології. Виберемо довільний елемент $[h_0]$ з множини M. Покладемо $y_i \in U_i$ для кожного $i = 1, 2, ..., n$, де $n \in N$, і розглянемо окіл

$$\begin{aligned} O([h_0]; x_1, y_1, x_2, y_2, ..., x_n, y_n) = \{[h] \in \Phi(X) \mid \\ h_0(x_i) = h_0(y_i) \Rightarrow h(x_i) = h(y_i) \text{ для кожного } i = 1, 2, ..., n, \} \end{aligned}$$

де $n \in \mathbb{N}$, елемента $[h_0]$. Далі виберемо довільний елемент

$$[\hat{h}] \in O([h_0]; x_1, y_1, x_2, y_2, ..., x_n, y_n),$$

тоді з рівності $h_0(x_i) = h_0(y_i)$ випливає, що $\hat{h}(x_i) = \hat{h}(y_i)$ для кожного $i = 1, 2, ..., n$. Оскільки $[h_0] \in M$, то з рівності $f(x_i) = f(u_i)$ випливає, що $h_0(x_i) = h_0(y_i)$ де $u_i \in U_i$ для кожного $i = 1, 2, ..., n$. Отже, $[\hat{h}] \in M$, тобто,

$$O([h_0]; x_1, y_1, x_2, y_2, ..., x_n, y_n) \subset M.$$

Що доводить відкритість множини M в коскінченній топології. Отже, $\tau^{fo} \prec \tau^{cf}$.

Предложение 2 *Скінченно-відкрита топологія τ^{fo} сильніша, ніж відкрито-відкрита топологія τ^{oo}.*

Доведення Нехай $[f]$ — довільний елемент множини $\Phi(X)$. Розглянемо множину

$$M([f], U_1, V_1, U_2, V_2, \ldots, U_n, V_n) = \{[t] \in \Phi(X) \mid$$
$$\exists x_i \in U_i, y_i \in V_i \colon f(x_i) = f(y_i) \Rightarrow \exists x_i' \in U_i, y_i' \in V_i \colon t(x_i') = t(y_i')$$
$$\text{для кожного } i = 1, 2, ..., n, \}$$

де $n \in \mathbb{N}$. Очевидно, що M — елемент бази відкрито-відкритої топології. Виберемо довільний елемент $[t_0]$ з множини M. Покладемо $x_i' \in U_i$ для кожного $i = 1, 2, ..., n$ і розглянемо окіл

$$O([t_0]; x_1', V_1, x_2', V_2, ..., x_n', V_n) =$$
$$\{[\varphi] \in \Phi(X) \mid \exists y_i' \in V_i \colon t(x_i') = t(y_i') \Rightarrow \exists y_i'' \in V_i \colon \varphi(x_i') = \varphi(y_i'')\}$$

елемента $[t_0]$. Нехай $[\widehat{\varphi}]$ — довільний елемент множини

$$O([t_0]; x_1', V_1, x_2', V_2, \ldots, x_n', V_n),$$

тоді з рівності $t_0(x_i') = t_0(y_i')$ випливає, що $\widehat{\varphi}(x_i') = \widehat{\varphi}(y_i'')$ для кожного $i = 1, 2, \ldots, n$. Оскільки $[t_0] \in M$, то з рівності $f(x_i) = f(y_i)$ випливає, що $t_0(x_i') = t_0(y_i')$ де $y_i, y_i', y_i'' \in U_i$ для кожного $i = 1, 2, \ldots, n$. Отже, $[\widehat{\varphi}] \in M$, тобто,

$$O([t_0]; x_1', V_1, x_2', V_2, \ldots, x_n', V_n) \subset M.$$

Це означає відкритість множини M в скінченно-відкритій топології. Отже, $\tau^{oo} \subset \tau^{fo}$.

Таким чином, має місце таке співвідношення: $\tau^{oo} \prec \tau^{fo} \prec \tau^{cf}$.

Література

1. Щепин Е.В. *Топология предельных пространств несчотных обратных спектров* / Е.В.Щепин // УМН — (1976) – т.31 – вып.5 – стор. 191–210.
2. Щепин Е.В. *Функторы и несчетные степени компактов* / Е.В.Щепин // УМН — (1981) – т.36 – вып.3 – стор. 3–61.
3. Федорчук В.В. Общая топология. Основные конструкции: Учебное пособие [для студ. мат. спец. вузов] / Федорчук В.В, Филипов В.В. – М., МГУ, 1988. – 252с.