ISSN 2072-9812

PROCEEDINGS
of the
INTERNATIONAL GEOMETRY CENTER

Volume 5, No. 2, 2012

ISSN 2072-9812

Благодійний фонд наукових досліджень "Наука"

Одеська національна академія харчових технологій

ПРАЦІ МІЖНАРОДНОГО ГЕОМЕТРИЧНОГО ЦЕНТРУ

Том.5, №. 2, 2012

ТРУДЫ МЕЖДУНАРОДНОГО ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ЦЕНТРА

Том.5, №. 2, 2012

PROCEEDINGS OF THE INTERNATIONAL GEOMETRY CENTER

Vol. 5, No. 2, 2012

Видається з 2008 року
виходить 4 рази на рік

Одеса
"Екологія"
2012

Засновники:
Благодійний фонд наукових досліджень "Наука"
Одеська національна академія харчових технологій

Рекомендовано до друку вченою радою
Одеської національної академії харчових технологій
(протокол № 10 від 06.02.2012)

Головний редактор: **Володимир Шарко**

Заступники головного редактора:**Йосип Красильщик, Ігор Микитюк, Анатолій Мілка.**

Відповідальні редактори:**Надія Коновенко, Віктор Кузаконь.**

Відповідальні секретарі: **Олексій Мойсеєнок, Юлія Федченко.**

Редакційна колегія:

Алексєєвский Д.	**Кац І.**	**Сергєєва О.**
Андерсен Я.	**Кіріченко В.**	**Страуме Е.**
Балан В.	**Кирилов В.**	**Толстіхіна А.**
Банах Т.	**Литвинов Г.**	**Федосов С.**
Гуревич Д.	**Машков О.**	**Фоменко А.**
Діскант В.	**Мікеш Й.**	**Фоменко В.**
Євтушик Л.	**Мормул П.**	**Шелехов А.**
Задорожний В.	**Пришляк О.**	**Шуригін В.**
Зарічний М.	**Рахула М.**	**Якубчик Б.**
Ібрагимов Н.	**Рубцов В.**	

©Благодійний фонд наукових досліджень "Наука", 2012

Главный редактор: **Владимир Шарко**

Заместители главного редактора: **Иосиф Красильщик, Игорь Микитюк, Анатолий Милка**.

Ответственные редакторы: **Надежда Коновенко, Виктор Кузаконь.**

Ответственные секретари: **Алексей Мойсеенок, Юлия Федченко.**

Редакционная коллегия:

Алексеевский Д.	**Кац И.**	**Сергеева А.**
Андерсен Я.	**Кириченко В.**	**Страуме Э.**
Балан В.	**Кириллов В.**	**Толстихина Г.**
Банах Т.	**Литвинов Г.**	**Федосов С.**
Гуревич Д.	**Микеш Й.**	**Фоменко А.**
Дискант В.	**Машков О.**	**Фоменко В.**
Евтушик Л.	**Мормул П.**	**Шелехов А.**
Задорожный В.	**Пришляк А.**	**Шурыгин В.**
Заричный М.	**Рахула М.**	**Якубчик Б.**
Ибрагимов Н.	**Рубцов В.**	

©Благотворительный фонд научных исследований "Наука", 2012

Editor-in-Chief: **Vladimir Sharko**

Deputies Editor-in-Chief: **Joseph Krasilshchik, Igor Mikityuk, Anatoliy Milka.**

Managing Editors: **Nadiia Konovenko, Viktor Kuzakon.**

Executive Secretary: **Alexei Moysyeyenok, Juliya Fedchenko.**

Editorial Board:

Alekseevsky D.	**Ibragimov N.**	**Roubtsov V.**
Anderson I.	**Kats I.**	**Sergeeva A.**
Balan V.	**Kirichenko V.**	**Shelekhov A.**
Banah T.	**Kirillov V.**	**Shurygin V.**
Diskant V.	**Litvinov G.**	**Straume E.**
Evtushik L.	**Mashkov O.**	**Tolstikhina G.**
Fedosov S.	**Mikes J.**	**Yakubchik B.**
Fomenko A.	**Mormul P.**	**Zadorozhnyi W.**
Fomenko V.	**Prishlyak A.**	**Zarichnyi M.**
Gurevich D.	**Rahula M.**	

©Charity Fund for Scientific Research "Science", 2012

Зміст

А.М. Шелехов
О три-тканях, образованных семействами окружностей. 6

K . Matsumoto and M. M Pripathi
Conformally Flat Twisted Product Manifolds 17

В. И. Паньженский
Автоморфизмы пространственно-временного многообразия Римана-Картана 27

О. П. Сурина
Связности Бервальда и Картана в обобщенном лагранжевом пространстве со специальной метрикой 35

В. А. Киосак
Про кількість розв'язків однієї системи алгебраїчних рівнянь 43

В. Э. Волков
Геометрическая форма фронта пламени и неустойчивость горения в круглой трубе 53

О три-тканях, образованных семействами окружностей

Александр Михайлович Шелехов

Аннотация Найдены структурные уравнения и кривизна три-ткани, образованой тремя семействами окружностей на плоскости. Сформулированы некоторые проблемы, связанные с описанием подкласса регулярных тканей.

Ключевые слова криволинейная три-ткань, три-ткань из семейств окружностей, кривизна ткани

УДК 514.763.7

Папирус Ахмеса и египетские пирамиды
являются, вероятно, самыми ранними
свидетельствами существования науки геометрия

Ф. Кэджори

... демаркационная линия между
древностью и современностью не столь резка

О. Нейгебауэр

... вряд ли случайно обнаружено было
... равенство круга и квадрата
со стороной, равной 8/9 его диаметра

А.П. Юшкевич

Памяти Вениамина Федоровича Кагана

Введение. Говорят, что 3 гладких семейства кривых на плоскости образуют в некоторой области D три-ткань W, если в каждой точке этой области кривые семейств попарно трансверсальны. Следуя В. Бляшке [1], мы рассматриваем три-ткани с точностью до локальных диффеоморфизмов: три-ткани W и $\widetilde{W}$, заданные в областях D и $\widetilde{D}$ соответственно, считаются эквивалентными, если существует локальный диффеоморфизм $D \to \widetilde{D}$, переводящий линии одной ткани в линии другой.

Простейшая три-ткань (мы называем ее параллельной) образована тремя семействами параллельных прямых. Три-ткань, эквивалентная параллельной ткани, называется параллелизуемой или регулярной. Все параллельные ткани эквивалентны друг другу и более того, они аффинно эквивалентны между собой.

Одна из важнейших задач в теории тканей — нахождение подкласса регулярных тканей в заданном классе тканей. Легко проверяется, что три-ткань, образованная тремя пучками прямых, является регулярной. Но уже следующая по сложности три-ткань, образованная тремя пучками окружностей (в [2] мы предложили называть ее *круговой тканью*, или, короче, *C-тканью*), не является, вообще говоря, регулярной. В 1953 году на одной из своих лекций в Стамбуле Бляшке привел пример регулярной круговой ткани (три эллиптических пучка с попарно совпадающими вершинами) и предложил найти все классы регулярных тканей, образованных пучками окружностей. По существу, пишет он в своей книге [1], задача сводится к некоторому алгебраическому уравнению. Но алгебраическое уравнение, о котором говорил Бляшке, оказалось слишком большой степени и слишком сложным для анализа, поэтому указанный им способ решения не позволил решить задачу полностью. Полное решение этой задачи оказалось весьма сложным, оно приведено в работах [2], [3], см. также [4].

В настоящей статье строится аппарат для изучения тканей, образованных тремя произвольными семействами окружностей. Используя метод внешних форм и подвижного репера Эли Картана, мы находим структурные уравнения такой ткани и ее важнейший дифференциальный относительный

инвариант — кривизну, обращение в нуль которой необходимо и достаточно для регулярности ткани.

Следуя Дарбу, мы рассматриваем окружность как точку трехмерного проективного пространства P^3. В интерпретации Дарбу точки плоскости (окружности нулевого радиуса) изображаются точками некоторой овальной квадрики пространства P^3, которая называется квадрикой Дарбу (мы обозначаем ее Q). Окружности вещественного и чисто мнимого радиуса изображаются точками внешней и внутренней (по отношению к квадрике Дарбу) области пространства P^3 соответственно; пучки окружностей — прямыми в P^3, связки окружностей — плоскостями. При этом гиперболические и эллиптические пучки изображаются, соответственно, прямыми, пересекающими и не пересекающими квадрику Дарбу; параболические пучки — прямыми, касающимися квадрики Дарбу; параболические связки окружностей — плоскостями, касающимися квадрики Дарбу; ортогональные пучки окружностей — прямыми, сопряженными относительно квадрики Дарбу. Точки, принадлежащие окружности C, изображаются точками квадрики Дарбу, лежащими на пересечении этой квадрики с плоскостью, полярно сопряженной образу точки C относительно Q, и т.д. Три семейства окружностей, образующих три-ткань, изображаются, следовательно, тремя кривыми (мы будем обозначать их ℓ_i, $i = 1, 2, 3$), а три окружности ткани из разных семейств, проходящие через точку M, изображаются тремя точками линий ℓ_i, лежащими в одной и той же касательной плоскости к квадрике Дарбу в точке M.

Наша теория обобщает результаты В. Лазаревой, которая методом Картана изучала ткани, образованные пучками окружностей, см. [5], [6]. Подвижной репер, построенный Лазаревой, был использован М. Акивисом в [7] для нахождения условия алгебраизуемости тройки пространственных кривых. Мы строим аналогичный репер и используем обозначения этих работ.

1. Подвижной репер, адаптированный к тройке кривых.

Напомним, что проективный репер в P^3 состоит из четырех точек общего положения $\{A_\alpha\}(\alpha,\ \beta,\ \gamma = 0, 1, 2, 3)$. Мы рассматриваем так называемый подвижной репер, то есть множество всех проективных реперов пространства. Инфинитезимальные перемещения подвижного репера запишем в обычном виде:

$$dA_\alpha = \omega_\alpha^\beta A_\beta, \tag{1}$$

где дифференциальные формы ω_α^β зависят от 16-ти параметров — однородных координат точек $\{A_\alpha\}$ относительно некоторого неподвижного репера и удовлетворяют структурным уравнениям проективного пространства:

$$d\omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta. \tag{2}$$

Здесь d означает внешнее дифференцирование, $\wedge$ — внешнее умножение.

Рассмотрим в P^3 3 гладкие кривые ℓ_i $(i = 1, 2, 3)$. Поместим вершину A_i репера на кривую ℓ_i и предположим, что плоскость $[A_1 A_2 A_3]$ трансверсальна кривым ℓ_i.

Так как точка A_i описывает кривую ℓ_i, то в силу (1) из трех форм ω_i^j, i, j, $k = 1, 2, 3$, при фиксированном i только одна линейно независимая. При этом, так как плоскость $[A_1\, A_2\, A_3]$ трансверсальна кривым ℓ_i, то $\omega_i^0 \neq 0$, и можно положить

$$\omega_i^j = \lambda_i^j\, \omega_i^0. \tag{3}$$

Тогда

$$dA_i = \omega_i^i A_i + \omega_i^0 B_i, \tag{4}$$

где

$$B_i = A_0 + \lambda_i^j\, A_j + \lambda_i^k\, A_k. \tag{5}$$

Дифференцируя уравнения (3), получим квадратичные уравнения, из которых найдем:

$$d\lambda_i^k + \lambda_i^k(\omega_k^k - \omega_0^0) + \omega_0^k + \lambda_i^j(\lambda_j^k - \lambda_i^k)\omega_j^0 - (\lambda_i^k)^2\omega_k^0 = 2\mu_i^k\omega_i^0. \tag{6}$$

Верны

Теорема 1. [5, 7] *Величины μ_i^k являются относительными проективными инвариантами тройки кривых ℓ_i. Кривая ℓ_i является прямой тогда и только тогда, когда $\mu_i^j = \mu_i^k = 0$ (здесь все индексы различны).*

Теорема 2. [7] *Для того, чтобы тройка кривых ℓ_i принадлежала одной нормкривой пространства P^3, необходимо и достаточно выполнения условий*

$$\mu_2^1 + \mu_1^2 = 0, \quad \mu_3^1 + \mu_1^3 = 0, \quad \mu_2^3 + \mu_3^2 = 0. \tag{7}$$

Как показано в [5], семейство реперов A_α можно сузить так, чтобы выполнялись равенства $\lambda_j^i + \lambda_k^i = 0$, в которых все индексы различны. Как и в [5], обозначим

$$\lambda_2^1 = -\lambda_3^1 = \lambda^1, \quad \lambda_3^2 = -\lambda_1^2 = \lambda^2, \quad \lambda_1^3 = -\lambda_2^3 = \lambda^3. \tag{8}$$

В результате канонизации уравнения (3) примут вид

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= -\lambda^2\,\omega_1^0, & \omega_1^3 &= \lambda^3\,\omega_1^0,\\ \omega_2^3 &= -\lambda^3\,\omega_2^0, & \omega_2^1 &= \lambda^1\,\omega_2^0,\\ \omega_3^1 &= -\lambda^1\,\omega_3^0, & \omega_3^2 &= \lambda^2\,\omega_3^0, \end{aligned} \tag{9}$$

а уравнения (6) приведутся к виду [7]:

$$\begin{aligned} d\lambda^1 + \lambda^1(\omega_1^1 - \omega_0^0) &= (\mu_2^1 + \lambda^1\lambda^2)\omega_2^0 + (\mu_3^1 - \lambda^1\lambda^3)\omega_3^0,\\ d\lambda^2 + \lambda^2(\omega_2^2 - \omega_0^0) &= (\mu_3^2 + \lambda^2\lambda^3)\omega_3^0 + (\mu_1^2 - \lambda^1\lambda^2)\omega_1^0,\\ d\lambda^3 + \lambda^3(\omega_3^3 - \omega_0^0) &= (\mu_1^3 + \lambda^3\lambda^1)\omega_1^0 + (\mu_2^3 - \lambda^3\lambda^2)\omega_2^0,\\ \omega_0^1 &= (\lambda^1)^2\omega_1^0 + (\mu_2^1 - \lambda^1\lambda^2)\omega_2^0 - (\mu_3^1 + \lambda^1\lambda^3)\omega_3^0,\\ \omega_0^2 &= (\lambda^2)^2\omega_2^0 + (\mu_3^2 - \lambda^2\lambda^3)\omega_3^0 - (\mu_1^2 + \lambda^2\lambda^1)\omega_1^0,\\ \omega_0^3 &= (\lambda^3)^2\omega_3^0 + (\mu_1^3 - \lambda^3\lambda^1)\omega_1^0 - (\mu_2^3 + \lambda^3\lambda^2)\omega_2^0. \end{aligned} \tag{10}$$

Точки B_i, лежащие на касательных к кривым ℓ_i, запишутся так (см. (5)):

$$B_1 = A_0 - \lambda^2 A_2 + \lambda^3 A_3, B_2 = A_0 - \lambda^3 A_3 + \lambda^1 A_1, B_3 = A_0 - \lambda^1 A_1 + \lambda^2 A_2. \tag{11}$$

Геометрический смысл канонизации: точка A_0 помещена в полюс плоскости $\pi_0 = [A_1A_2A_3]$ относительно линейчатой квадрики K с образующими $[A_iB_i]$ [6].

В результате канонизации величины λ^i становятся относительными инвариантами, геометрический смысл обращения их в нуль найден в [5]. В частности, в случае, когда ℓ_i прямые, обращение всех λ^i в нуль означает, что прямые ℓ_i проходят через одну точку. Этот результат можно усилить. Как видно, из формул (10), соотношения $\lambda^i = 0$ влекут равенства $\mu_i^k = 0$. Это обстоятельство отражает следующий геометрически очевидный результат: если кривые ℓ_i таковы, что касательные к ним в любой тройке точек A_i пересекаются в одной точке, то такие кривые ℓ_i являются прямыми.

Непосредственным вычислением доказывается также следующее

Предложение 3. *Соприкасающаяся плоскость π_i к кривой ℓ_i в текущей точке A_i имеет вид $[A_iB_iC_i]$, где*

$$C_1 = -\mu_1^2 A_2 + \mu_1^3 A_3,\ C_2 = -\mu_2^3 A_3 + \mu_2^1 A_1,\ C_3 = -\mu_3^1 A_1 + \mu_3^2 A_2.$$

В репере A_α плоскости π_i определяются соответственно уравнениями:

$$\begin{aligned} &(\mu_1^3\lambda^2 - \mu_1^2\lambda^3)x^0 + \mu_1^3 x^2 + \mu_1^2 x^3 = 0,\\ &(\mu_2^1\lambda^3 - \mu_2^3\lambda^1)x^0 + \mu_2^3 x^1 + \mu_2^1 x^3 = 0,\\ &(\mu_3^2\lambda^1 - \mu_3^1\lambda^2)x^0 + \mu_3^2 x^1 + \mu_3^1 x^2 = 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Плоскости π_i и $\pi_0 = [A_1A_2A_3]$ принадлежат одной связке тогда и только тогда, когда выполнено условие

$$\mu_1^3\mu_2^1\mu_3^2 + \mu_2^3\mu_1^2\mu_3^1 = 0. \tag{13}$$

Из предложения 3 и теоремы 2 вытекает

Теорема 4. *Для того, чтобы тройка кривых ℓ_i принадлежала одной нормкривой пространства P^3, необходимо и достаточно, чтобы плоскости π_i и $\pi_0 = [A_1A_2A_3]$ принадлежали одной связке с вершиной в точке Брианшона треугольника $A_1A_2A_3$ относительно коники $\pi_0 \cap K$.*

Доказательство сводится к непосредственному вычислению.

2. Уравнение три-ткани W, образованной семействами окружностей.

Пусть квадрика Дарбу Q задана в подвижном репере A_α уравнением

$$g_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta = 0. \tag{14}$$

Коэффициенты $g_{\alpha\beta} \equiv g_{\beta\alpha}$ являются функциями параметров подвижного репера и удовлетворяют уравнениям:

$$dg_{\alpha\beta} - g_{\gamma\beta}\omega_\alpha^\gamma - g_{\alpha\gamma}\omega_\beta^\gamma = \theta g_{\alpha\beta}. \tag{15}$$

Напомним, что мы рассматриваем три-ткань W, образованную тремя семействами окружностей. Семейства окружностей, образующих три-ткань, изображаются в P^3 кривыми ℓ_i, а три окружности ткани из разных семейств, проходящие через точку M, изображаются тремя точками линий ℓ_i, лежащими в одной и той же касательной плоскости к квадрике Дарбу. Поэтому мы сужаем семейство реперов, оставляя только такие реперы, у которых плоскость $\pi_0 = [A_1A_2A_3]$ касается квадрики Дарбу Q.

Поместим в точку касания точку $M = A_1 + A_2 + A_3$ (еще одно сужение семейства реперов). Подставляя координаты точки M в уравнение (14), получим соотношение

$$g_{11} + g_{22} + g_{33} + 2g_{12} + 2g_{13} + 2g_{23} = 0,$$

которое можно записать в виде

$$g_1 + g_2 + g_3 = 0, \tag{16}$$

введя обозначения

$$g_\alpha = g_{\alpha 1} + g_{\alpha 2} + g_{\alpha 3}. \tag{17}$$

Напомним, что полярное соответствие точек $A(x^\alpha)$ $B(y^\alpha)$ относительно квадрики Q определяется равенством $g_{\alpha\beta}x^\alpha y^\beta = 0$. Кратко это условие записывают в виде $(AB) = 0$. В частности, для базисных точек условие $(A_\alpha B_\beta) = 0$ эквивалентно $g_{\alpha\beta} = 0$.

Так как плоскость $\pi_0 = [A_1A_2A_3]$ касается квадрики Q в точке $M = A_1 + A_2 + A_3$, то эта точка полярно сопряжена каждой точке плоскости π_0. Это эквивалентно условиям $(MA_1) = 0$, $(MA_2) = 0$, $(MA_3) = 0$, что в силу обозначений (17) дает

$$g_i = 0. \tag{18}$$

Теперь, используя деривационные уравнения (1), запишем дифференциал точки $M = A_1 + A_2 + A_3$:

$$dM = (\omega_1^0 + \omega_2^0 + \omega_3^0)A_0 + (...)A_1 + (...)A_2 + (...)A_3.$$

Напомним, что точка M лежит на квадрике Q, а плоскость $\pi_0 = [A_1A_2A_3]$ касается Q в точке M. Поэтому в в правой части коэффициент при A_0 должен равняться нулю:

$$\omega_1^0 + \omega_2^0 + \omega_3^0 = 0. \tag{19}$$

Мы получили дифференциальное уравнение рассматриваемой ткани W в подвижном репере.

3. Структурные уравнения три-ткани W, образованной семействами окружностей.

Продифференцируем равенства (18), пользуясь уравнениями (15). После преобразований с учетом (18) и (19), получим:

$$g_{ik}\tilde{\omega}^k + g_0\omega_i^0 = 0, \tag{20}$$

где введено обозначение

$$\tilde{\omega}^k = \omega_1^k + \omega_2^k + \omega_3^k. \tag{21}$$

В силу (18) из уравнений (20) только 2 независимых. С учетом (18) первые 2 из них перепишем в виде:

$$g_{11}(\tilde{\omega}^1 - \tilde{\omega}^3) + g_{12}(\tilde{\omega}^2 - \tilde{\omega}^3) + g_0\omega_1^0 = 0,$$
$$g_{21}(\tilde{\omega}^1 - \tilde{\omega}^3) + g_{22}(\tilde{\omega}^2 - \tilde{\omega}^3) + g_0\omega_2^0 = 0.$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что эта система имеет решение

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}^1 - \tilde{\omega}^3 &= \frac{g_0}{\Delta}(g_{23}\omega_1^0 - g_{12}\omega_3^0), \\ \tilde{\omega}^2 - \tilde{\omega}^3 &= \frac{g_0}{\Delta}(g_{13}\omega_2^0 - g_{12}\omega_3^0), \end{aligned} \tag{22}$$

где обозначено

$$\Delta = g_{12}g_{13}+g_{12}g_{23}+g_{13}g_{23} \equiv g_{11}g_{22}-(g_{12})^2 \equiv g_{11}g_{33}-(g_{13})^2 \equiv g_{22}g_{33}-(g_{23})^2. \tag{23}$$

Равенства (22) запишем в более симметричной форме, введя новую форму $\tilde{\theta}$:

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}^1 &= \tilde{\theta} + \frac{g_0}{\Delta} g_{23}\omega_1^0, \\ \tilde{\omega}^2 &= \tilde{\theta} + \frac{g_0}{\Delta} g_{13}\omega_2^0, \\ \tilde{\omega}^3 &= \tilde{\theta} + \frac{g_0}{\Delta} g_{12}\omega_3^0. \end{aligned} \tag{24}$$

Непосредственным вычислением убеждаемся, что внешнее дифференцирование уравнения (19) в силу (24) приводит к тождеству и справедливы уравнения

$$d\omega_1^0 = \omega_1^0 \wedge \omega, \quad d\omega_1^0 = \omega_1^0 \wedge \omega, \tag{25}$$

где

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_0^0 - \tilde{\theta} + \omega_1^2 + \omega_2^1 + \omega_1^3 + \omega_3^1 + \omega_2^3 + \omega_3^2 = \\ &= \omega_0^0 - \tilde{\theta} + (\lambda^3 - \lambda^2)\omega_1^0 + (\lambda^1 - \lambda^3)\omega_2^0 + (\lambda^2 - \lambda^1)\omega_3^0. \end{aligned} \tag{26}$$

Согласно теории [8], уравнения (25) являются структурными уравнениями рассматриваемой ткани W, а форма ω является ее формой кривизны.

4. Кривизна три-ткани W, образованной семействами окружностей.

Непосредственным вычислением доказываем следующие утверждения.

Лемма 1.

$$\begin{aligned} dg_0 =& g_0(\theta + \omega_0^0) + g_{0k}\tilde{\omega}^k = \\ =& g_0(\theta + \tilde{\theta} + \omega_0^0) + \frac{g_0}{\Delta}(g_{01}g_{23}\omega_1^0 + g_{02}g_{13}\omega_2^0 + g_{03}g_{12}\omega_3^0). \end{aligned} \tag{27}$$

Лемма 2.

$$\begin{aligned} d\Delta =& 2\Delta(\theta + 2\tilde{\theta} - (\omega_1^2 + \omega_2^1 + \omega_1^3 + \omega_3^1 + \omega_2^3 + \omega_3^2)) + \\ &+ 2g_{23}(g_{02} + g_{03})\omega_1^0 + 2g_{13}(g_{01} + g_{03})\omega_2^0 + 2g_{12}(g_{01} + g_{02})\omega_3^0. \end{aligned} \tag{28}$$

С помощью формул (27) и (28) доказывается

Лемма 3. *Внешнее дифференцирование уравнений (24) дает единственное уравнение:*

$$\begin{aligned} d\tilde{\theta} =& -\frac{g_0}{\Delta}(g_{11}\lambda^1 + g_{22}\lambda^2 + g_{33}\lambda^3)\omega_1^0 \wedge \omega_2^0 - \\ &- \frac{g_0}{\Delta^2}(g_{01}g_{23}(g_{13} - g_{12}) + g_{02}g_{13}(g_{12} - g_{23}) + g_{03}g_{12}(g_{23} - g_{13}))\omega_1^0 \wedge \omega_2^0. \end{aligned} \tag{29}$$

Наконец, с помощью этой формулы и предыдущих продифференцируем форму ω, данную формулой (26). После вычислений получается

Теорема 5. *Форма кривизны ткани W удовлетворяет уравнению*

$$d\omega = b\omega_1^0 \wedge \omega_2^0,$$

где b — кривизна ткани W — вычисляется по формуле:

$$\begin{aligned} b = &-2(\mu_1^2 + \mu_1^2 + \mu_1^3 + \mu_3^1 + \mu_3^2 + \mu_2^3) + \\ &+ \frac{g_0}{\Delta}(\lambda^1(g_{22} + g_{33}) + \lambda^2(g_{11} + g_{33}) + \lambda^3(g_{11} + g_{22})) + \\ &+ \frac{g_0}{\Delta^2}(g_{01}g_{23}(g_{13} - g_{12}) + g_{02}g_{13}(g_{12} - g_{23}) + g_{03}g_{12}(g_{23} - g_{13})). \end{aligned} \tag{30}$$

В случае, если $\mu_j^i = 0$ (кривые ℓ_i являются прямыми, то есть ткань W состоит из пучков окружностей) эта формула совпадает с найденной в работе [5].

5. Подход к классификации регулярных три-тканей, образованных семействами окружностей.

Три-ткань W является регулярной, если ее кривизна равна нулю [1].

Регулярные круговые три-ткани ($\mu_j^i = 0$), как уже было отмечено выше, полностью описаны.

Равенства $\lambda^i = 0$ влекут $\mu_j^i = 0$ (см. выше), следовательно, этот класс также не представляет интереса.

Как видно из формулы (30), кривизна представляет собой сумму трех слагаемых, принадлежащих, соответственно, дифференциальным окрестностям второго, первого и нулевого порядков. Поэтому в классе регулярных тканей ($b = 0$) естественным образом выделяются 3 подкласса, определяемые, соответственно, условиями:

$$\mu_1^2 + \mu_1^2 + \mu_1^3 + \mu_3^1 + \mu_3^2 + \mu_2^3 = 0, \tag{31}$$

$$\lambda^1(g_{22} + g_{33}) + \lambda^2(g_{11} + g_{33}) + \lambda^3(g_{11} + g_{22} = 0, \tag{32}$$

$$g_{01}g_{23}(g_{13} - g_{12}) + g_{02}g_{13}(g_{12} - g_{23}) + g_{03}g_{12}(g_{23} - g_{13} = 0. \tag{33}$$

В связи с этим возникают следующие задачи.

Задача 1. Выяснить геометрический смысл каждого из условий (31) — (33) и описать соответствующие классы регулярных тканей. Например, условие регулярности первого из этих классов состоит из двух равенств — (31) и

$$\begin{aligned} &\Delta(\lambda^1(g_{22} + g_{33}) + \lambda^2(g_{11} + g_{33}) + \lambda^3(g_{11} + g_{22})) + \\ &+ (g_{01}g_{23}(g_{13} - g_{12}) + g_{02}g_{13}(g_{12} - g_{23}) + g_{03}g_{12}(g_{23} - g_{13})) = 0. \end{aligned} \tag{34}$$

Последнее равенство описывает все регулярные круговые ткани. Оно исследовалось в [5], но его геометрический смысл до сих пор не выяснен, хотя все регулярные круговые ткани описаны! Поэтому возникает

Задача 2. Найти геометрический смысл условия (34), в частности, при условиях $\mu^i_j = 0$.

К равенствам (31) и (34) следует добавить их дифференциальные следствия. Заметим, что дифференцирование (31) не даст новых условий на величины λ^i и $g_{\alpha\beta}$. Этот факт вытекает из легко доказываемого

Предложения 6. *Система (10) правильно продолжаема.*

Задача 3. Найти регулярные ткани в случае (7) (кривые ℓ_i принадлежат одной кубической нормкривой).

Задача 4. Найти необходимое и достаточное условие принадлежности кривых ℓ_i одной кубической поверхности и описать регулярные ткани такого типа.

В заключение укажем обзор [9], посвященный дифференциальной геометрии окружностей и сфер, см. также §6 в [10].

Список литературы

1. Blaschke, W.: *Birkhauser Einfürung in die Geometrie der Waben*, Verlag/Basel–Stuttgart. Basel, 1955. Русский перевод: Бляшке, В. *Введение в геометрию тканей.* М., Физматгиз, 1959.
2. Шелехов, А.М.: *О три-тканях, образованных пучками окружностей.* Современная математика и ее приложения (Итоги науки и техники ВИНИИ). **32** (2005), 7–28.
3. Лазарева, В.Б.; Шелехов, А.М.: *О триангуляциях плоскости пучками коник.* Матем. сб. **198** (2007), N 11, 107–134.
4. Лазарева, В.Б. *Классификация регулярных круговых три-тканей с точностью до круговых преобразований.* Фундаментальная и прикладная математика. Материалы Международной научной конференции "Лаптевские чтения – 2009 посвящённой 100-летию со дня рождения Г. Ф. Лаптева (Москва–Тверь, 25–28 августа 2009 г.). Том 16, выпуск 1, часть 1, 2010, с. 95-107.
5. Лазарева, В.Б.: *Три-ткани, образованные семействами окружностей на плоскости.* Дифференциальная геометрия, Калинин, Калининский гос. ун-т, 1977, 49–64 (РЖМат, 1977, 12А780).
6. Лазарева, В.Б.: *Три-ткани на двумерной поверхности в триаксиальном пространстве.* Дифференциальная геометрия многообразий фигур, Калининград, Калининский гос. ун-т, 1979, N 10, 54–79 (РЖМат, 1980, 1А820).
7. Акивис, М.А.: *Об условии алгебраизуемости тройки кривых в трехмерном проективном пространстве.* Ткани и квазигруппы, Калинин, Калининский гос. ун-т, 1987, 129–136 (РЖМат, 1987, 7А701).
8. Лазарева, В.Б.; Уткин, А.А.; Шелехов, А.М. *К теории криволинейных три-тканей.* Итоги науки и техники ВИНИТИ. Современная математика и ее приложения. Т. 124, Москва, 2010, стр. 63-114.
9. Акивис, М.А. Конформно-дифференциальная геометрия. Итоги науки. Геометрия, 1963. Изд. ВИНИТИ АН СССР, 1965, с. 108-137.
10. Гейдельман, Р.М. Дифференциальная геометрия семейств подпространств в многомерных однородных пространствах. Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия, 1965. Изд. ВИНИТИ АН СССР, 1967, с. 323-374.

Александр Михайлович Шелехов
Тверской государственный университет, Тверь, Россия
E-mail: amshelekhov@rambler.ru

Alexander M. Shelekhov

Three-webs formed by families of circles.

The structure equations and the curvature of the 3-web formed by 3 families of circles are found. Some problems arising under the classification of regular webs of this type are formulated.

Conformally Flat Twisted Product Manifolds

K . Matsumoto M. M Pripathi

Abstract On 1995, T. Ikawa and J. B. Jun proved the following: If a doubly warped product manifold $M = M_1 \times M_2$ is conformally flat, then the manifolds M_1 and M_2 are conformally flat, too. As the corollary of this theorem, we can get the same properties in the case of product and warped product manifolds. But, about the case of a twisted product manifold, we can not see the similar theorem, yet. So, in this paper, we prove the same theorem in a twisted product manifold, that is, Let $M = M_1 \times_f M_2$ be a conformally flat twisted product manifold with the associated function f. Then the manifolds M_1 and M_2 are conformally flat, too.

Keywords Conformally flat, twisted product manifold

Mathematics Subject Classification (2000) 53C40

1 Twisted product manifolds

Let (M_1, g_1) and (M_2, g_2) be Riemannian manifolds and M be a topological product manifold of M_1 and M_2. We define a Riemannian metric g of M as

$$g(U,V) = e^{f^2} g_1(\pi_{1*}U, \pi_{1*}V) + g_2(\pi_{2*}U, \pi_{2*}V) \tag{1.1}$$

for any $U, V \in TM$, where f denotes a positive differentiable function on M . Then the manifold M is called a *twisted product manifold with an associated function* f and we write it $M = M_1 \times_f M_2$ ([2],[3]).

Remark. In a twisted product manifold $M = M_1 \times_f M_2$, if the associated function f is in M_2, then the the manifold M is a warped product Riemannian manifold ([4]) and f is constant (=1), then the manifold M is a product manifold.

Let $M = M_1 \times_f M_2$ be a twisted product manifold with the associated function f and let $\dim M_1 = n_1$, $\dim M_2 = n_2$ and $\dim M = n = n_1 + n_2$. Moreover, let $(x^1, x^2, ..., x^{n_1})$, $(x^{n_1+1}, ..., x^{n_1+n_2})$ be local coordinate systems of M_1 and M_2, respectively. Then we consider that $(x^1, x^2, ..., x^n)$ is a local coordinate system of M.

Using the above local coordinate systems, we can write

$$(g_{\mu\lambda}) = \begin{pmatrix} e^{f^2} g_{1ji} & 0 \\ 0 & g_{2ba} \end{pmatrix}, \qquad (g^{\mu\lambda}) = \begin{pmatrix} e^{-f^2} g_1{}^{ji} & 0 \\ 0 & g_2{}^{ba} \end{pmatrix}, \tag{1.2}$$

where the indices $(j, i, ..., h)$, $(d, c, ..., a)$ and $(\nu, \mu, ..., \lambda)$ run over the ranges $(1, 2, ..., n_1)$, $(n_1 + 1, n_1 + 2, ..., n_1 + n_2)$ and $(1, 2, ..., n_1 + n_2 = n)$, respectively.

By virtue of (1.2), the Christoffel symbols $\{_\nu{}^\lambda{}_\mu\}$ with respect to $g_{\mu\lambda}$ are given by

$$\begin{aligned} \{_j{}^h{}_i\} &= \{_j{}^h{}_i\}_1 + f^2\{(\partial_j \log f)\delta_i{}^h + (\partial_i \log f)\delta_j{}^h - (\partial_1{}^h \log f)g_{1ji}\}, \\ \{_b{}^h{}_i\} &= f^2(\partial_b \log f)\delta_i{}^h, \quad \{_b{}^h{}_a\} = 0, \\ \{_j{}^a{}_i\} &= -f^2 e^{f^2}(\partial_2{}^a \log f)g_{1ji}, \quad \{_j{}^a{}_b\} = 0, \quad \{_c{}^a{}_b\} = \{_c{}^a{}_b\}_2, \end{aligned} \tag{1.3}$$

where $\partial_1{}^h = g_1{}^{lh}\partial_l$ (resp. $\partial_2^a = g_2{}^{ea}\partial_e$) and $\{_j{}^h{}_i\}_1$ (resp. $\{_c{}^a{}_b\}_2$) denotes the Christoffel symbol of g_1 (resp. g_2).

Next, we calculate the Riemannian curvature tensor $R_{\omega\nu\mu}{}^\lambda$ with respect to $g_{\mu\lambda}$. Using (1.2) and (1.3) and by the straightforward calculation, we get

(1.4)

$$\begin{aligned} R_{kji}{}^h &= R^1{}_{kji}{}^h + f^2(2 - f^2)[(\partial_i \log f)\{(\partial_k \log f)\delta_j{}^h - \\ &\quad -(\partial_j \log f)\delta_k{}^h\} - (\partial_1{}^h \log f)\{(\partial_k \log f)g_{1ji} - \\ &\quad -(\partial_j \log f)g_{1ki}\}] + f^2\{(\nabla_{1k}\partial_i \log f)\delta_j{}^h - \\ &\quad -(\nabla_{1j}\partial_i \log f)\delta_k{}^h - (\nabla_{1k}\partial_1{}^h \log f)g_{1ji} + \\ &\quad +(\nabla_{1j}\partial_1{}^h \log f)g_{1ki}\} - (f^4(\|\log f_1\|^2 + 4e^{f^2}\|\log f_2\|^2)(g_{1ji}\delta_k{}^h - g_{1ki}\delta_j{}^h), \\ R_{kji}{}^a &= f^2 e^{f^2}[2(\partial_2{}^a \log f)\{(\partial_j \log f)g_{1hi} - (\partial_k \log f)g_{1ji}\} + \\ &\quad +(\partial_j\partial_2{}^a \log f)g_{1ki} - (\partial_k\partial_2{}^a \log f)g_{1ji}], \\ R_{kjb}{}^h &= 2f^2(\partial_b \log f)\{(\partial_k \log f)\delta_j{}^h - (\partial_j \log f)\delta_k{}^h\} \\ &\quad f^2\{(\partial_k\partial_b \log f)\delta_j{}^h - (\partial_j\partial_b \log f)\delta_k{}^h\}, \\ R_{kbi}{}^h &= -2f^2(\partial_b \log f)\{(\partial_i \log f)\delta_k{}^h - (\partial_1{}^h \log f)g_{1ki}\} - \\ &\quad -f^2\{(\partial_c\partial_i \log f)\delta_k{}^h - (\partial_c\partial_1{}^h \log f)g_{1ki}\}, \\ R_{kci}{}^a &= f^2 e^{f^2}\{(2 + f^2)(\partial_c \log f)(\partial_2{}^a \log f) + \nabla_{2c}\partial_2{}^a \log f\}g_{1ki} \\ R_{kba}{}^h &= -f^2\{(2 + f^2)(\partial_b \log f)(\partial_a \log f) + (\nabla_{2b}\partial_a \log f)\}\delta_k{}^h, \\ R_{kjb}{}^a &= 0, \quad R_{kcb}{}^a = 0, \quad R_{dcb}{}^h = 0, \quad R_{dcb}{}^a = R^2{}_{dcb}{}^a, \end{aligned}$$

where ∇_1 (resp. ∇_2) is the covariant differentiation with respect to g_1 (resp. g_2) and ${R^1}_{kji}{}^h$ (resp. ${R^2}_{dcb}{}^a$) denotes the Riemannian curvature tensor with respect to g_{1ji} (resp. g_{2ba}).

Moreover, using (1.2) and (1.3), the calculation of the Ricci Tensor $R_{\mu\lambda}$ with respect to $g_{\mu\lambda}$ gives us

$$\begin{aligned} R_{ji} = {R^1}_{ji} + (n_1-2)f^2\{(2-f^2)(\partial_j \log f)(\partial_i \log f) + \nabla_{1j}\partial_i \log f\} - \\ -\{(2-2f^2+n_1f^2)\|\nabla_1 \log f\|^2 + \nabla_{1l}\partial_1{}^l \log f\} + \\ +e^{f^2}\{(2+n_1f^2)\|\nabla_2 \log f\|^2 + \nabla_{2e}\partial_2{}^e \log f\} g_{1ji}, \\ R_{ja} = -(n_1-1)f^2\{2(\partial_j \log f)(\partial_a \log f) + \partial_j\partial_a \log f\}, \\ R_{ba} = {R^2}_{ba} - n_1 f^2\{(2+f^2)(\partial_b \log f)(\partial_a \log f) + \nabla_{2b}\partial_a \log f\} \end{aligned} \tag{1.5}$$

where ${R^1}_{ji}$ (resp. ${R^2}_{ba}$) is the Ricci tensor with respect to g_{1ji} (resp. g_{2ba}).

Finally, the scalar curvature R with respect to $g_{\mu\lambda}$ is given by

$$\begin{aligned} R = e^{-f^2}R^1 + R^2 + (n_1-1)f^2 e^{-f^2}\{(4-2f^2+n_1f^2)\|\nabla_1 \log f\|^2 + \\ +2\nabla_{1l}\partial_1{}^l \log f_1\} - n_1 f^2\{(4+n_1f^2+f^2)\|\nabla_2 \log f\|^2 + \\ +2\nabla_{2e}\partial_2{}^e \log f\}, \end{aligned} \tag{1.6}$$

where R^1 (resp. R^2) denotes the scalar curvature with respect to g_{1ji} (resp. g_{2ba}).

2 Conformal curvature tensors

In this section, we calculate the conformal curvature tensor $C_{\omega\nu\mu}{}^\lambda$ with respect to $g_{\mu\lambda}$. The conformal curvature tensor $C_{\omega\nu\mu}{}^\lambda$ is defined by

$$\begin{aligned} C_{\omega\nu\mu}{}^\lambda = R_{\omega\nu\mu}{}^\lambda + \frac{1}{n-2}(R_{\omega\mu}\delta_\nu{}^\lambda - R_{\nu\mu}\delta_\omega{}^\lambda + \\ +R_\nu{}^\lambda g_{\omega\mu} - R_\omega{}^\lambda g_{\nu\mu}) + \frac{R}{(n-1)(n-2)}(g_{\nu\mu}\delta_\omega{}^\lambda - g_{\omega\mu}\delta_\nu{}^\lambda). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Using (1.2), (1.4), (1.5), (1.6) and (2.1), after the direct calculations, we obtain

$$
\begin{aligned}
C_{kji}{}^{h} &= R^{1}{}_{kji}{}^{h} + \frac{1}{n-2}T_{kji}{}^{h} + \frac{n_2(2-f^2)f^2}{n-2}S_{kji}{}^{h} + \\
&+ \frac{n_2 f^2}{n-2}\{(\nabla_{1k}\partial_i \log f)\delta_j{}^{i} - \nabla_{1j}\partial_i \log f)\delta_k{}^{h} - \\
&-(\nabla_{1k}\partial_1{}^{h} \log f)g_{1ji} + (\nabla_{1j}\partial_1{}^{h} \log f)g_{1ki} - \\
&-A(g_{1ji}\delta_k{}^{h} - g_{1ki}\delta_j{}^{h}) \\
C_{kjb}{}^{h} &= \frac{2(n_2-1)f^2}{n-2}(\partial_b \log f)\{(\partial_k \log f)\delta_j{}^{h} - (\partial_j \log f)\delta_k{}^{h}\} + \\
&+ \frac{(n_2-1)f^2}{n-2}\{(\partial_k\partial_b \log f)\delta_j{}^{h} - (\partial_j\partial_b \log f)\delta_k{}^{h}\}, \\
C_{kci}{}^{h} &= \frac{2(n_2-1)f^2}{n-2}[(\partial_c \log f)\{(\partial_1{}^{h} \log f)g_{ki} - (\partial_c \log f)\delta_k{}^{h}\} - \\
&-(\partial^h\partial_c \log f)g_{1ki} - (\partial_c\partial_i \log f)\delta_k{}^{h}], \\
C_{dcb}{}^{h} &= 0, \quad C_{kji}{}^{a} = 0, \quad C_{kjb}{}^{a} = 0, \quad C_{kcb}{}^{a} = 0, \\
C_{kcb}{}^{h} &= \frac{1}{n-2}(R^{2}{}_{cb}\delta_k{}^{h} + e^{-f^2}R^{1}{}_{k}{}^{h}g_{2cb}) - \\
&- \frac{(n_2-2)f^2}{n-2}\{(2+f^2)(\partial_c \log f)(\partial_b \log f) + \nabla_{2c}\partial_b \log f\}\delta_k{}^{h} + \\
&+ \frac{(n_1-2)f^2e^{-f^2}}{n-2}\{(2-f^2)(\partial_k \log f)(\partial_1{}^{h} \log f) + \\
&+ \nabla_{1k}\partial_1{}^{h} \log f\}g_{2cb} + Bg_{2cb}\delta_k{}^{h}, \\
C_{kci}{}^{a} &= \frac{1}{n-2}(R^{1}{}_{ki}\delta_c{}^{a} + e^{f^2}R^{2}{}_{c}{}^{a}g_{1ki}) + \\
&+ \frac{(n_2-2)f^2e^{f^2}}{n-2}\{(2+f^2)(\partial_c \log f)(\partial_2{}^{a} \log f) + \\
&+ \nabla_{2c}\partial_2{}^{a} \log f\}g_{1ki} - \frac{(n_1-1)f^2}{n-2}\{(2-f^2)(\partial_k \log f)(\partial_i \log f) + \\
&+ (\nabla_{1k}\partial_i \log f\}\delta_c{}^{a} + Cg_{1ki}\delta_c{}^{a}, \\
C_{kcb}{}^{a} &= -\frac{(n_1-1)f^2}{n-2}[2(\partial_k \log f)\{(\partial_b \log f)\delta_c{}^{a} - (\partial_2{}^{a} \log f)g_{2cb}\} \\
C_{dcb}{}^{a} &= R^{2}{}_{dcb}{}^{a} + \frac{1}{n-2}T_{dcb}{}^{a} + \frac{n_1 f^2(2+f^2)}{n-2}S_{dcb}{}^{a} - \\
&- \frac{n_1 f^2}{n-2}\{(\nabla_{2c}\partial_2{}^{a} \log f)g_{2db} - (\nabla_{2d}\partial_2{}^{a} \log f)g_{2cb} + \\
&+ (\nabla_{2d}\partial_b \log f)\delta_c{}^{a} - (\nabla_{2c}\partial_b \log f)\delta_d{}^{a} + (\nabla_{2c}\partial_2{}^{a} \log f)g_{2db} - \\
&- (\nabla_{2c}\partial_2{}^{a} \log f)g_{2cb}\} + \frac{R}{(n-1)(n-2)}(g_{2cb}\delta_d{}^{a} - g_{2db}\delta_c{}^{a})
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

where we put

$$
\begin{aligned}
T_{kji}{}^{h} &= R^{1}{}_{ki}\delta_{j}{}^{h} - R^{1}{}_{ji}\delta_{k}{}^{h} + R^{1}{}_{j}{}^{h}g_{1ki} - R^{1}{}_{k}{}^{h}g_{1ji}, \\
T_{dcb}{}^{a} &= R^{2}{}_{db}\delta_{c}{}^{a} - R^{2}{}_{cb}\delta_{d}{}^{a} + R^{2}{}_{c}{}^{a}g_{2db} - R^{2}{}_{d}{}^{a}g_{2cb}, \\
S_{kji}{}^{h} &= (\partial_1 \log f_1)\{(\partial_j \log f_1)\delta_{k}{}^{h} - (\partial_k \log f_1)\delta_{j}{}^{h}\}+ \\
&\quad +(\partial_{1}{}^{h} \log f_1)\{\partial_k \log f_1)g_{1ji} - (\partial_j \log f_1)g_{1ki} \\
S_{dcb}{}^{a} &= (\partial_b \log f_2)\{(\partial_c \log f_2)\delta_{d}{}^{a} - (\partial_d \log f_2)\delta_{c}{}^{a}\}+ \\
&\quad +(\partial_{2}{}^{a} \log f_2)\{\partial_d \log f_2)g_{2cb} - (\partial_c \log f_2)g_{2db},
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

and A, B and C are respectively the coefficient of $g_{1ji}\delta_{k}{}^{h} - g_{1k}\delta_{j}{}^{h}$, $g_{2db}\delta_{k}{}^{h}$ and $g_{1ki}\delta_{c}{}^{a}$.

3 Conformally flat twisted product manifolds

A Riemannian manifold (M, g) is called *conformally flat* if its conformal curvature vanishes. If $\dim M = 3$, the conforal curvature tensor vanishes, identically. So, in this case, the manifold M is conformally flat if anf only if

$$
\nabla_\nu R_{\mu\lambda} - \nabla_\mu R_{\nu\lambda} + \frac{1}{4}\{(\nabla_\nu R)g_{\mu\lambda} - (\nabla_\mu R)g_{\nu\lambda}\} = 0 \quad ([5]). \tag{3.1}
$$

The following lemma is very useful to prove our theorem.

Lemma 3.1. *An n $(n > 3)$-dimensional Riemannian manifold M is conformally flat if and only if the Riemannian curvature tensor $R_{\omega\nu\mu}{}^{\lambda}$ satisfies*

$$
\begin{aligned}
R_{\omega\nu\mu}{}^{\lambda} + \frac{1}{n-2}(R_{\omega\mu}\delta_{\nu}{}^{\lambda} - R_{\nu\mu}\delta_{\omega}{}^{\lambda} + R_{\nu}{}^{\lambda}g_{\omega\mu} - R_{\omega}{}^{\lambda}g_{\nu\mu})+ \\
+A(g_{\nu\mu}\delta_{\omega}{}^{\lambda} - g_{\omega\mu}\delta_{\nu}{}^{\lambda}) = 0
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

for a certain function A.

A 3-dimensional Riemannian manifold M is conformally flat if and only if the Ricci tensor $R_{\mu\lambda}$ satsifies

$$
\nabla_\nu R_{\mu\lambda} - \nabla_\mu R_{\nu\lambda} + T_\nu g_{\mu\lambda} - T_\mu g_{\nu\lambda} = 0 \tag{3.3}
$$

for a certain vector field T_λ.

Proof. About (3.2), we can easily get

$$
A = \frac{R}{(n-1)(n-2)}
$$

which means $M(\dim M > 3)$ is conformally flat.

For about (3.3), using the Bianchi identity, we can easily see

$$T_\lambda = \frac{1}{4}\nabla_\lambda R$$

which means (3.1).

Let the twisted product manifold $M = M_1 \times_f M_2$ be conformally flat and we assume that $\dim M_1 > 3$. Since the conformal curvature tensor $C_{\omega\nu\mu}{}^\lambda = 0$, we have from $C_{kci}{}^a = 0$

$$(3.4)\quad (R^1{}_{ki}\delta_c{}^a + e^{f^2}R^2{}_c{}^a g_{1ki}) + (n_2-2)f^2e^{f^2}\{(2+f^2)(\partial_c \log f)(\partial_2{}^a \log f)+$$
$$+\nabla_{2c}\partial_2{}^a \log f\}g_{1ki} - (n_1-2)f^2\{(2-f^2)(\partial_k \log f)\partial_i \log f) + \nabla_{1k}\partial_i \log f\}\delta_c{}^a-$$
$$-f^2\{(2-2f^2+n_1f^2)\|\nabla_1 \log f\|^2 + \nabla_{1l}\partial_1{}^l \log f + (2+n_1f^2)e^{f^2}\|\nabla_2 \log f\|^2+$$
$$+e^{f^2}\nabla_{2e}\partial_2{}^e \log f\}g_{1ki}\delta_c{}^a - \frac{e^{f^2}R}{n-1}g_{1ki}\delta_c{}^a = 0.$$

Contracting (3.4) by c and a, we obtain

$$(3.5)\qquad n_2R^1{}_{ki} + e^{f^2}R^2g_{1ki} + (n_2-2)f^2e^{f^2}\{(2+f^2)\|\nabla_2 \log f\|^2+$$
$$+\nabla_{2e}\partial_2{}^e \log f\}g_{1ki} - n_2(n_1-2)f^2\{(2-f^2)(\partial_k \log f)(\partial_i \log f)+$$
$$+\nabla_{1k}\partial_i \log f\} - n_2f^2\{(2-2f^2+n_1f^2)\|\nabla_1 \log f\|^2 + \nabla_{1l}\partial_1{}^l \log f+$$
$$+(2+n_1f^2)e^{f^2}\|\nabla_2 \log f\|^2 + e^{f^2}\nabla_{2e}\partial_2{}^e \log f\}g_{1ki} - \frac{n_2e^{f^2}R}{n-1}g_{1ki} = 0.$$

Moreover, a transvection of (3.5) by $g_1{}^{ki}$ gives us

$$(3.6)\qquad e^{f^2}R^2 + (n_2-2)f^2e^{f^2}\{(2+f^2)\|\nabla_2 \log f\|^2 + \nabla_{2e}\partial_2{}^e \log f\}-$$
$$-n_2f^2\{(2-2f^2+n_1f^2)\|\nabla_1 \log f\|^2 + \nabla_{1l}\partial_1{}^l \log f+$$
$$+(2+n_1f^2)e^{f^2}\|\nabla_2 \log f\|^2 + e^{f^2}\nabla_{2e}\partial_2{}^e \log f\} - \frac{n_2e^{f^2}R}{n-1} =$$
$$= \frac{n_2}{n_1}R^1 + \frac{n_2(n_1-2)f^2}{n_1}\{(2-f^2)\|\nabla_1 \log f\|^2 + \nabla_{1l}\partial_1{}^l \log f\}.$$

Substituting the above equation into (3.5), we get

$$(3.7)\qquad f^2\{(2-f^2)(\partial_k \log f)(\partial_i \log f) + \nabla_{1k}\partial_i \log f\} = \frac{1}{n_1-2}[R^1{}_{ki}-$$
$$-\frac{R^1}{n_1} + \frac{(n_2-2)f^2}{n_1}\{(2-f^2)\|\nabla_1 \log f\|^2 + \nabla_{1l}\partial_1{}^l \log f\}g_{1ki}].$$

Using (3.7), we have

$$\frac{n_2f^2}{n-2}[\{(2-f^2)(\partial_k \log f)(\partial_i \log f) + \nabla_{1k}\partial_i \log f\}\delta_j{}^h-$$

$$-\{(2-f^2)(\partial_j \log f)(\partial_i \log f) + \nabla_{1j}\partial_i \log f\}\delta_k{}^h -$$
$$-\{(2-f^2)(\partial_k \log f)(\partial_1{}^h \log f) + \nabla_{1k}\partial^h \log f\}g_{ji} +$$
$$+\{(2-f^2)(\partial_j \log f)(\partial_1{}^h \log f) + \nabla_{1j}\partial^h \log f\}g_{ki}]$$
$$= \frac{n_2}{(n-2)(n_1-2)}\{R^1{}_{ki}\delta_j{}^h - R^1{}_{ji}\delta_k{}^h + R^1{}_j{}^h g_{1ki} - R^1{}_k{}^h g_{1ji}\} -$$
$$-\frac{2n_2}{(n-2)(n_1-2)}[\frac{R^1}{n_1} + \frac{(n_1-2)f^2}{n_1}\{(2-f^2)\|\nabla_1 \log f\|^2 +$$
$$+\nabla_{1l}\partial_1{}^l \log f\}](g_{1ki}\delta_j{}^h - g_{1ji}\delta_k{}^h).$$

Substituting the above equation into $C_{kji}{}^h = 0$, we have

$$R^1{}_{kji}{}^h + \frac{1}{n_1-2}(R^1{}_{ki}\delta_j{}^h - R^1{}_{ji}\delta_k{}^h + R^1{}_j{}^h g_{1ki} - \tag{3.8}$$
$$-R^1{}_k{}^h g_{1ji}) + A_1(g_{1ki}\delta_j{}^h - g_{1ji}\delta_k{}^h) = 0$$

for a certain function A_1.

For the manifold M_2, using $(2.2)_6$ and $(2.2)_8$, we can prove

$$R^2{}_{dcb}{}^a + \frac{1}{n_2-2}(R^2{}_{db}\delta_c{}^a - R^2{}_{cb}\delta_d{}^a + R^2{}_c{}^a g_{2db} - \tag{3.9}$$
$$-R^2{}_d{}^a g_{2cb}) + A_2(g_{2db}\delta_c{}^a - g_{2cb}\delta_d{}^a) = 0$$

for a certain function A_2, too.

Next, let M_1 be a 3-dimensional one, that is, $n_1 = 3$. Then, by virtue of $(1.5)_1$, the Ricci tensor R_{ji} satisfies

$$R_{ih} = R^1{}_{ih} - f^2\{(2-f^2)(\partial_i \log f)(\partial_h \log f) + \nabla_{1i}\partial_h \log f\} + \tag{3.10}$$
$$+\{(2+f^2)\|\nabla_1 \log f\|^2 + \nabla_{1l}\partial_1{}^l \log f + (2+3f^2)e^{f^2}\|\nabla_2 \log f\|^2 +$$
$$+e^{f^2}(\nabla_{2e}\partial_2{}^e \log f)\}f^2 g_{1ih}.$$

Since $\nabla_j R_{ih}$ is defined by

$$\nabla_j R_{ih} = \frac{\partial R_{ih}}{\partial x^j} - \{_j{}^l{}_i\}R_{lh} - \{_i{}^l{}_h\}R_{jl} - \{_j{}^e{}_i\}R_{ie} - \{_i{}^e{}_h\}R_{je},$$

we know

$$\nabla_j R_{ih} - \nabla_i R_{jh} = \frac{\partial R_{ih}}{\partial x^j} - \frac{\partial R_{jh}}{\partial x^i} - \tag{3.11}$$
$$-\{_j{}^l{}_h\}R_{il} + \{_i{}^l{}_h\}R_{jl} - \{_j{}^e{}_h\}R_{ie} + \{_i{}^e{}_h\}R_{je}.$$

Using (3.10), we obtain

$$\frac{\partial R_{ih}}{\partial x^j} - \frac{\partial R_{jh}}{\partial x^i} = \frac{\partial R^1{}_{ih}}{\partial x^j} - \frac{\partial R^1{}_{jh}}{\partial x^i} - 2f^2\{(\partial_j \log f)(\nabla_{1i}\partial_h \log f) \tag{3.12}$$

$$-(\partial_i \log f)(\nabla_{1j}\partial_h \log f)\} - (2-f^2)f^2\{(\partial_i \log f)(\partial_j\partial_h \log f)-$$
$$-(\partial_j \log f)(\partial_i\partial_h \log f)\} - f^2\{(\partial_j\nabla_{1i}\partial_h \log f) - (\partial_i\nabla_{1j}\partial_h \log f)\}-$$
$$-2f^2\|\nabla_1 \log f\|^2\{(\partial_j \log f)g_{1ih} - (\partial_i \log f)g_{1jh}\}-$$
$$-(2+f^2)f^2\{(\partial_j\|\nabla_1 \log f\|^2)g_{1ih} - (\partial_i\|\nabla_1 \log f\|^2)g_{1jh}\}-$$
$$-f^2\{(\partial_j\nabla_{1l}\partial_1{}^l \log f)g_{1ih} - (\partial_i\nabla_{1l}\partial_1{}^l \log f)g_{1jh}\}-$$
$$-2(5+3f^2)f^4e^{f^2}\|\nabla_2 \log f\|^2\{(\partial_j \log f)g_{1ih} - (\partial_i \log f)g_{1jh}\}-$$
$$-(2+3f^2)f^2e^{f^2}\{(\partial_j\|\nabla_2 \log f\|^2)g_{1ih} - (\partial_i\|\nabla_2 \log f\|^2)g_{1jh}\}-$$
$$-2f^4e^{f^2}(\nabla_{2e}\partial_2{}^e \log f)\{(\partial_j \log f)g_{1ih} - (\partial_i \log f)g_{1jh}\}-$$
$$-f^2e^{f^2}\{(\partial_j\nabla_{2e}\partial_2{}^e \log f)g_{1ih} - (\partial_i\nabla_{2e}\partial_2{}^e \log f)g_{1jh}\}-$$
$$-2A_3\{(\partial_j \log f)g_{1ih} - (\partial_i \log f)g_{1jh}\} - A_3(\partial_j g_{1ih} - \partial_i g_{1jh}).$$

for a certain function A_3 on M. By virtue of (1.3) and (1.5), we have

$$-\{_j{}^l{}_h\}R_{il} + \{_i{}^l{}_h\}R_{jl} = -\{_j{}^l{}_h\}_1R^1{}_{il} + \{_i{}^l{}_h\}_1R^1{}_{jl}- \tag{3.13}$$
$$-f^2\{(\partial_j \log f)R^1{}_{ih} - (\partial_i \log f)R^1{}_{jh} - (\partial_1{}^l \log f)R^1{}_{il}g_{1jh} + (\partial_1{}^l \log f)R^1{}_{jl}g_{1ih}\}+$$
$$+f^2(2-f^2)\{(\partial_i \log f)\{_j{}^l{}_h\}_1(\partial_l \log f) - (\partial_j \log f)\{_i{}^l{}_h\}_1(\partial_l \log f)\}+$$
$$+f^2\{\{_j{}^l{}_h\}_1(\nabla_{1i}\partial_l \log f) - \{_i{}^l{}_h\}_1(\nabla_{1j}\partial_l \log f)\}+$$
$$+f^4\{(\partial_j \log f)(\nabla_{1i}\partial_h \log f) - (\partial_i \log f)(\nabla_{1j}\partial_h \log f)\}-$$
$$-f^4(2-f^2)\|\nabla_1 \log f\|^2\{(\partial_i \log f)g_{1jh} - (\partial_j \log f)g_{1ih}\}-$$
$$-f^4\{(\partial_1{}^l \log f)(\nabla_{1i}\partial_l \log f)g_{1jh} - (\partial_1{}^l \log f)(\nabla_{1j}\partial_l \log f)g_{1ih}\}+$$
$$+A_3\{\{_j{}^l{}_h\}_1g_{1il} - \{_i{}^l{}_h\}_1g_{1jl}\} + 2A_3f^2\{(\partial_j \log f)g_{1ih} - \partial_i \log f)g_{1jh}\}$$

and

$$-\{_j{}^e{}_h\}R_{ie} + \{_i{}^e{}_h\}R_{je} = 4f^4e^{f^2}\|\nabla_2 \log f\|^2\{(\partial_j \log f)g_{1ih}- \tag{3.14}$$
$$-(\partial_i \log f)g_{1jh}\} + f^4e^{f^2}\{(\nabla_{1j}\nabla_2 \log f\|^2)g_{1ih} - (\nabla_{1i}\nabla_2 \log f\|^2)g_{1jh}.\}$$

Substituting (3.12), (3.13) and (3.14) into (3.11), we obtain

$$\nabla_jR_{ih} - \nabla_iR_{jh} = \nabla_{1j}R^1{}_{ih} - \nabla_{1i}R^1{}_{jh}+ \tag{3.15}$$
$$+B_1\{(\partial_j \log f)g_{1ih} - (\partial_i \log f)g_{1jh}\} + f^2R^1{}_{jih}{}^l\partial_l \log f-$$
$$-\frac{1}{2}(4+f^2)f^2\{(\partial_j\|\nabla_1 \log f\|^2)g_{1ih} - (\partial_i\|\nabla_1 \log f\|^2)g_{1jh}\}-$$
$$-2(1+f^2)f^2\{(\partial_j\|\nabla_2 \log f\|^2)g_{1ih} - (\partial_i\|\nabla_2 \log f\|^2)g_{1jh}\}-$$

$$-f^2\{(\partial_j\nabla_{1l}\partial_1{}^l\log f)g_{1ih}-(\partial_i\nabla_{1l}\partial_1{}^l\log f)g_{1jh}\}-$$
$$-f^2e^{f^2}\{(\partial_j\nabla_{2e}\partial_2{}^e\log f)g_{1ih}-(\partial_i\nabla_{2e}\partial_2{}^e\log f)g_{1jh}\}-$$
$$-f^2\{(\partial_j\log f)R^1{}_{ih}-(\partial_i\log f)R^1{}_{jh}-(\partial_1{}^l\log f)R^1{}_{il}g_{1jh}+(\partial_1{}^l\log f)R^1{}_{jl}g_{1ih}\}$$

for a certain function B_1 on M.

On the other hand, in any 3-dimensional Riemannian manifold, the conformal curvature tensor is zero, identically. So we have in the 3-dimensional manifold M_1

$$C^1{}_{kji}{}^h=R^1{}_{kji}{}^h+R^1{}_{ki}\delta_j{}^h-R^1{}_{ji}\delta_k{}^h+R^1{}_j{}^hg_{1ki}-R^1{}_k{}^hg_{1ji}+$$
$$+\frac{R^1}{2}(g_{1ji}\delta_k{}^h-g_{1ki}\delta_j{}^h)=0,$$

where $C^1{}_{kji}{}^h$ denotes the conformal curvature tensor with respect to g_1.

Substituting the above equation into (3.15), we have

$$\nabla_jR_{ih}-\nabla_iR_{jh}=\nabla_{1j}R^1{}_{ih}-\nabla_{1i}R^1{}_{jh}+ \tag{3.16}$$
$$+B\{(\partial_j\log f)g_{1ih}-(\partial_i\log f)g_{1jh}\}-$$
$$-\frac{1}{2}(4+f^2)f^2\{(\partial_j\|\nabla_1\log f\|^2)g_{1ih}-(\partial_i\|\nabla_1\log f\|^2)g_{1jh}\}-$$
$$-2(1+f^2)f^2\{(\partial_j\|\nabla_2\log f\|^2)g_{1ih}-(\partial_i\|\nabla_2\log f\|^2)g_{1jh}\}-$$
$$-f^2\{(\partial_j\nabla_{1l}\partial_1{}^l\log f)g_{1ih}-(\partial_i\nabla_{1l}\partial_1{}^l\log f)g_{1jh}\}-$$
$$-f^2e^{f^2}\{(\partial_j\nabla_{2e}\partial_2{}^e\log f)g_{1ih}-(\partial_i\nabla_{2e}\partial_2{}^e\log f)g_{1jh}\}+$$
$$+\frac{R^1}{2}f^2\{(\partial_j\log f)g_{1ih}-(\partial_i\log f)g_{1jh}\}.$$

Moreover, since M is conformally flat, we know

$$\nabla_jR_{ih}-\nabla_iR_{jh}=\frac{1}{n-1}\{(\partial_jR)g_{ih}-(\partial_iR)g_{jh}\}.$$

Thus we have from the above equation and (3.16)

$$\nabla_{1j}R^1{}_{ih}-\nabla_{1i}R^1{}_{jh}+T_jg_{1ih}-T_ig_{1jh}=0 \tag{3.17}$$

for a certain vector field T_i on M_1.

When $\dim M_2=3$, we can get the similar equation with (3.17), that is,

$$\nabla_{2c}R^2{}_{ba}-\nabla_{2b}R^2{}_{ca}+T_cg_{2ba}-T_bg_{2ca}=0 \tag{3.18}$$

for a certain vector field T_a on M_2.

Thus we have from (3.8), (3.9), (3.17), (3.18) and the lemma, we have our theorem.

References

1. Agaoka, Y. and Kim. B. H: On conformally flat twisted product manifolds. Fac. Integrated Arts and Sci., Hiroshima Univ., Ser. IV **23**, (1997).
2. Chen, B. Y.: Totally umbilical submanifolds. Soochow J. Math., **5**, (1979).
3. Ikawa, T and Jun, J. B. : On conformally spaces with doubly warped product Riemannian metric. J. of General Education, Nihon Univ., **21** (1995)
4. O'Neil, B.: Semi-Riemannian Geometry. Academic Press, New York, (1981).
5. Yano, K. : Differential Geometry on complex and almost complex spaces. Pergamon Press, New York (1965).

Matsumoto Koji

2-3-65, Nishi-Odori, Yonezawa, Yamagata, 992-0059, Japan.

tokiko_matsumoto@yahoo.com

Tripashi, Mukut Mani

Department of Mathematics and DST-CIMS , Faculty of Science, Banarasi Hindu University, Vanarasi, 221005, India.

mmtripathi@yahoo.com

Автоморфизмы пространственно-временного многообразия Римана-Картана

Владимир Иванович Паньженский

Аннотация Доказано, что размерность группы Ли автоморфизмов пространственно-временного многообразия Римана-Картана $(M^4, g, \widetilde{\nabla})$ не превосходит 8. Если связность $\widetilde{\nabla}$ полусимметрическая или кососимметрическая, то максимальная размерность группы равна 7.

Ключевые слова Многообразие Римана-Картана, автоморфизмы, группа Ли.

УДК 514.76

Введение. Гладкое n - мерное многообразие M называется многообразием Римана-Картана, если на M задана (псевдо) риманова метрика g и линейная связность $\widetilde{\nabla}$ с кручением $\widetilde{S} \neq 0$, согласованная с $g : \widetilde{\nabla} g = 0$ [1]. Если $n = 4$, а g - псевдориманова метрика сигнатуры $(+---)$, то M назовем пространственно-временным многообразием Римана-Картана.

Диффеоморфизм $\varphi : M \longrightarrow M$ называется автоморфизмом многообразия Римана-Картана, если он оставляет инвариантным g и $\widetilde{\nabla}$. Так как $\widetilde{\nabla} = \nabla + \widetilde{T}$, где ∇ - связность Леви-Чивита метрики g, а $\widetilde{T}$ ее тензор деформации и из инвариантности g следует инвариантность ∇ [2], то связность $\widetilde{\nabla}$ инвариантна тогда и только тогда, когда инвариантен тензор деформации $\widetilde{T}$. Очевидно, что инвариантность $\widetilde{T}$ эквивалентна инвариантности ковариантного тензора деформации T. Из инвариантности $\widetilde{T}(T)$ следует инвариантность $\widetilde{S}(S)$ и наоборот. Таким образом множество всех автоморфизмов многообразия Римана-Картана либо совпадает с группой движений (псевдо) риманова многообразия (M, g) либо является ее подгруппой Ли, оставляю-

щей инвариантным тензорное поле T и, следовательно, имеет размерность $r \leq \frac{n(n+1)}{2}$.

В работе [3] нами доказано, что *размерность группы Ли автоморфизмов n - мерного многообразия Римана-Картана меньше $\frac{n(n+1)}{2}$ и равна $\frac{n(n+1)}{2}$ только при $n = 3$*. Из этого утверждения следует, что размерность группы автоморфизмов пространственно-временного многообразия Римана-Картана меньше 10. В настоящей работе мы докажем, что размерность группы автоморфизмов не может превосходить 8, а в случае полусимметричности или кососимметричности связности максимальная размерность группы автоморфизмов пространственно-временного многообразия Римана-Картана равна 7.

1. Теорема 1. Размерность группы Ли автоморфизмов пространственно-временного многообразия Римана-Картана не превосходит 8. Если связность $\tilde{\nabla}$ полусимметрическая или кососимметрическая, то размерность группы не превосходит 7.

Доказательство. Пусть G группа Ли автоморфизмов пространственно-временного многообразия Римана-Картана M. Стационарная подгруппа точки x_0 индуцирует группу изотропий G_0 в касательном пространстве $\mathbb{E} = T_{x_0}M$, которая является подгруппой псевдоортогональных преобразований псевдоевклидова векторного пространства $\mathbb{E} = \mathbb{E}^4_{1,3}$. Так как тензор кручения $\tilde{S}$ инвариантен относительно G, то значение тензорного поля $\tilde{S}$ в точке x_0 является ненулевым тензором на $\mathbb{E}$ инвариантном относительно G_0. Рассмотрим $\tilde{S}$ как кососимметрическое отображение $\mathbb{E} \times \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$. Пусть ξ элемент алгебры Ли псевдоортогональных преобразований пространства $\mathbb{E}$, а $\varphi_t = expt\xi$ - однопараметрическая подгруппа преобразований, порожденная ξ. Тогда ξ принадлежит алгебре Ли g_0 группы Ли G_0 если и только если φ_t оставляет инвариантным тензор $\tilde{S}$, т.е.

$$\tilde{S}(\varphi_t u, \varphi_t v) = \varphi_t \tilde{S}(u, v), u, v \in \mathbb{E}, t \in \mathbb{R} \tag{1}$$

Дифференцируя (1) по t при $t = 0$, получаем

$$\tilde{S}(\xi u, v) + \tilde{S}(u, \xi v) = \xi \tilde{S}(u, v) \tag{2}$$

Пусть (e_1, e_2, e_3, e_4) - ортонормированный базис в $\mathbb{E}$ и S^i_{jk} и ξ^i_j - компоненты $\tilde{S}$ и ξ в этом базисе. Тогда уравнения (2) примут вид

$$S^i_{pk}\xi^p_j + S^i_{jp}\xi^p_k - S^q_{jk}\xi^i_q = 0 \tag{3}$$

или

$$(S^i_{pk}\delta^q_j + S^i_{jp}\delta^q_k - S^q_{jk}\delta^i_p)\xi^p_q = 0 \tag{4}$$

где δ^i_j - символ Кронекера (единичная матрица, тождественный линейный оператор). Таким образом мы имеем систему линейных уравнений (4) относительно неизвестных ξ^p_q элементов алгебры Ли g_0 группы Ли G_0 псевдоортогональных преобразований пространства $\mathbb{E}^4_{1,3}$. Матрица, составленная из элементов этой алгебры имеет вид

$$(\xi^p_q) = \begin{pmatrix} 0 & \xi^1_2 & \xi^1_3 & \xi^1_4 \\ \xi^1_2 & 0 & \xi^2_3 & \xi^2_4 \\ \xi^1_3 & -\xi^2_3 & 0 & \xi^3_4 \\ \xi^1_4 & -\xi^2_4 & -\xi^3_4 & 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Учитывая косую симметрию по j, k выражения стоящее в скобках системы (4) и вид матрицы (5) мы получаем систему из 24 уравнений относительно 6 неизвестных переменных $\xi^p_q (p < q)$.Выписывая эту систему нетрудно убедиться, что ее минимальный ранг равен 2. Действительно, для любой ненулевой компоненты S^i_{jk} мы можем указать два линейно независимых уравнения системы (4). Пусть, например $S^1_{23} \neq 0$, тогда уравнения системы (4) занумерованных индексами $i = 1, j = 2, k = 4$ и $i = 1, j = 3, k = 4$ имеют вид

$$... + 0 \cdot \xi^2_4 + S^1_{23} \cdot \xi^3_4 = 0$$

$$... + S^1_{32} \cdot \xi^2_4 + 0 \cdot \xi^3_4 = 0$$

и, следовательно, линейно независимы. Если $S^1_{12} \neq 0$ то имеем два линейно независимых уравнения, занумерованных индексами $i = 1, j = 1, k = 3$ и $i = 1, j = 1, k = 4$:

$$... + S^1_{12} \cdot \xi^2_3 + 0 \cdot \xi^2_4 + ... = 0$$

$$... + 0 \cdot \xi^2_3 + S^1_{12} \cdot \xi^2_4 + ... = 0$$

и т.д. Так как ранг системы (4) не меньше двух, то размерность группы изотропии G_0 не больше четырех, а размерность всей группы автоморфизмов не более 8.

Связность $\tilde{\nabla}$ является полусимметрической, если ее тензор кручения $\tilde{S}$ имеет вид

$$S^i_{jk} = \frac{1}{n-1} \cdot (\delta^i_j \eta_k - \delta^i_k \eta_j) \tag{6}$$

где $\eta_k = S^p_{pk}$. Подставляя (6) в (4), получим

$$\frac{1}{n-1} \cdot (\delta^i_p \eta_k \delta^q_j - \delta^i_k \eta_p \delta^q_j + \delta^i_j \eta_p \delta^q_k - \delta^i_p \eta_j \delta^q_k - \delta^q_j \eta_k \delta^i_p + \delta^q_k \eta_j \delta^i_p) \xi^p_q = 0$$

или

$$(-\delta^i_k \delta^q_j + \delta^i_j \delta^q_k) \eta_p \xi^p_q = 0 \tag{7}$$

Докажем, что ранг системы (7) не меньше 3. Действительно, для каждой ненулевой компоненты η_p мы можем указать три линейно независимых уравнения системы (7). Пусть, например, $\eta_1 \neq 0$. Тогда уравнения системы (7) занумерованных индексами $i = j = 1, k = 2, 3, 4$ имеют вид:

$$(-\delta_k^1 \delta_1^q + \delta_k^q)\eta_1 \xi_q^1 + (-\delta_k^1 + \delta_k^1)\eta_p \xi_1^p + ... = 0$$

или

$$\delta_k^q \eta_1 \xi_q^1 + ... = 0$$

и, очевидно, линейно независимы. Если $\eta_2 \neq 0$, то уравнения при $i = j = 2, k = 1, 3, 4$:

$$... + (-\delta_k^2 \delta_2^q + \delta_k^q)\eta_2 \xi_q^2 + (-\delta_k^2 + \delta_k^2)\eta_p \xi_2^p + ... = 0$$

или

$$... + \delta_k^q \eta_2 \xi_q^2 + ... = 0$$

линейно независимы и т.д. Так как ранг системы (7) не меньше 3, то размерность группы изотропии G_0 не более 3, а размерность группы автоморфизмов не более 7.

Связность $\tilde{\nabla}$ называется кососимметрической если ее ковариантный тензор деформации T кососимметричны по своим аргументам. Условия кососимметричности тензора T является необходимым и достаточным условием совпадения симметрической части связности $\tilde{\nabla}$ со связностью Леви-Чивита ∇ метрики g [4]. В этом случае $T_{ijk} = \frac{1}{2} S_{ijk}$ и ковариантный тензор кручения так же кососимметричен по всем индексам. Поэтому компоненты S_{ijk} как и компоненты S_{jk}^i вычисленные в точке x_0. содержащие два одинаковых индекса равны нулю. Учитывая этот факт, мы можем для любой ненулевой компоненты $S_{jk}^i, i \neq j \neq k$ указать три линейно независимых уравнения системы (4). Пусть, например, $S_{23}^1 \neq 0$. Рассмотрим подсистему системы (4) уравнения которой занумерованы индексами:$i = 4, j = 1, k = 2; i = 4, j = 1, k = 3$ и $i = 4, j = 2, k = 3$. Матрица состоящая из столбцов при неизвестных ξ_q^p с индексами $p = 1, q = 4; p = 2, q = 3$ и $p = 3, q = 4$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & S_{12}^3 \\ 0 & S_{13}^2 & 0 \\ -S_{23}^1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и, очевидно, является невырожденной и , следовательно, эти уравнения линейно независимы. Таким образом и в этом случае размерность группы автоморфизмов пространственно-временного многообразия не превосходит 7.

2. Теорема 2. Если связность $\tilde{\nabla}$ является полусимметрической или кососимметрической, то максимальная размерность группы Ли автоморфизмов пространственно-временного многообразия Римана-Картана равна 7.

Доказательство. Рассмотрим псевдориманово четырехмерное многообразие M^4 с метрикой стационарной модели Вселенной [5]

$$ds^2 = dx^{0^2} - e^{2Hx^0} \cdot (dx^{1^2} + dx^{2^2} + dx^{3^2}), \tag{8}$$

где $x_0 = ct$, H - постоянная Хаббла красного смещения. Вычисляя тензор кривизны пространства M^4 убеждаемся в справедливости следующего равенства

$$R_{ijkl} = -H^2(g_{il}g_{jk} - g_{ik}g_{jl}), \tag{9}$$

где g_{ij} - компоненты метрического тензора g. Это означает, что M^4 является пространством постоянной секционной кривизны $k = -H^2$. Поэтому группа движений этого пространства имеет максимальную размерность 10.

Рассмотрим замкнутую подгруппу $\mathbb{G}^7$ группы движений $\mathbb{G}^{10}$, содержащую все движения пространственного сечения $\mathbb{E}^3$ и оставляющую инвариантным единичное векторное поле ортогональное $\mathbb{E}^3$. Операторы этой подгруппы имеют следующий вид

$$\partial_\alpha, -x^\beta\partial_\alpha + x^\alpha\partial_\beta, -\frac{1}{H}\partial_0 + x^\alpha\partial_\alpha(\alpha < \beta, \alpha, \beta = 1, 2, 3) \tag{10}$$

В (10) первые 6 векторных полей являются базисными операторами группы движений $\mathbb{G}^6$ евклидова пространства $\mathbb{E}^3$, а седьмое векторное поле найдено из условия инвариантности относительно этого поля метрики (8) пространства M^4 и единичного векторного поля, ортогонального $\mathbb{E}^3$. Для векторных полей (10) выписывая уравнения инвариантности ковариантного тензора деформации T

$$\xi^p\partial_p T_{ijk} + \partial_i\xi^p T_{pjk} + \partial_j\xi^p T_{ipk} + \partial_k\xi^p T_{ijp} = 0 \tag{11}$$

и интегрируя полученную систему дифференциальных уравнений в частных производных относительно неизвестных функций T_{ijk}, учитывая косую симметрию по последним двум индексам, находим компоненты тензора деформации, инвариантного относительно $\mathbb{G}^7$

$$T_{110} = T_{220} = T_{330} = -T_{101} = -T_{202} = -T_{303} = a \cdot e^{2Hx^0}, (a = const)$$

$$T_{123} = T_{231} = T_{312} = -T_{132} = -T_{213} = -T_{321} = b \cdot e^{3Hx^0}, (b = const)$$

остальные $T_{ijk} = 0$. Таким образом мы имеем пространственно-временное многообразие M^4 с группой автоморфизмов $\mathbb{G}^7$ максимальной размерности,

базисные операторы которой имеют вид (10) и структурой Римана-Картана (g, T) где

$$g = dx^0 \otimes dx^0 - e^{-2Hx^0} \cdot (dx^1 \otimes dx^1 + dx^2 \otimes dx^2 + dx^3 \otimes dx^3) \tag{12}$$

$$T = a \cdot e^{2Hx^0} \sum_\alpha dx^\alpha \otimes dx^\alpha \wedge dx^0 + b \cdot e^{3Hx^0} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \tag{13}$$

Если $a = 0$, то T_{ijk} кососимметричен по всем индексам и мы имеем кососимметрическую связность. Если $b = 0$, то связность $\tilde{\nabla}$ является полусимметрической, так как, очевидно $T_{ijk} = \frac{1}{3} \cdot (g_{ik}\eta_j - g_{ij}\eta_k)$ при $\eta_j = (3r, o, o, o)$.

Замечание. В теории Эйнштейна-Картана кручение вводится для геометризации спиновой плотности материи. При этом спин представлен некоторым ковектором, который и должен определять кручение. В нашем случае на эту роль может претендовать полусимметрическая часть связности. Наличие кососимметрической части говорит о том, что кручение может и не представлять спина.

3. В пространственном сечении ($x^0 = const$), которое является евклидовым пространством E^3 тензор кручения имеет вид

$$S = s \cdot dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \tag{14}$$

где постоянную s мы назовем кручением пространства.

Исследуем закон параллельного перенесения вектора в связности $\tilde{\nabla}$ с кососимметрическим кручением (24). Находим коэффициенты $\tilde{\Gamma}^k_{ij}$ связности $\tilde{\nabla}$:

$$\tilde{\Gamma}^3_{12} = \tilde{\Gamma}^1_{23} = \tilde{\Gamma}^2_{31} = -\tilde{\Gamma}^3_{21} = -\tilde{\Gamma}^1_{32} = -\tilde{\Gamma}^2_{13} = s \tag{15}$$

остальные нули. Уравнения параллельного переноса

$$\frac{dv^k}{dt} + \tilde{\Gamma}^k_{ij} \frac{dx^i}{dt} v^j = 0 \tag{16}$$

вектора $v^k = v^k(t)$ вдоль кривой $x^k = x^k(t)$ примут вид

$$\begin{aligned} &\frac{dv^1}{dt} + s(\frac{dx^2}{dt}v^3 - \frac{dx^3}{dt}v^2) = 0 \\ &\frac{dv^2}{dt} + s(\frac{dx^3}{dt}v^1 - \frac{dx^1}{dt}v^3) = 0 \\ &\frac{dv^3}{dt} + s(\frac{dx^1}{dt}v^2 - \frac{dx^2}{dt}v^1) = 0 \end{aligned} \tag{17}$$

Исследуем подробнее параллельное перенесение, например, вектора $v(1, 0, 0)$ вдоль кривой $x^1 = 0, x^2 = 0, x^3 = t$ т.е. вдоль оси x^3 прямоугольной

декартовой системы координат в E^3. Уравнения (27) в этом случае выглядят так:

$$\frac{dv^1}{dt} - sv^2 = 0$$

$$\frac{dv^2}{dt} + sv^1 = 0 \tag{18}$$

$$\frac{dv^3}{dt} = 0$$

Интегрируя систему (28), находим ее общее решение

$$v^1 = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} cos(st - \varphi_0)$$

$$v^2 = -\sqrt{c_1^2 + c_2^2} sin(st - \varphi_0) \tag{19}$$

$$v^3 = c_3,$$

где $\varphi_0 = arctg\frac{c_2}{c_1}$.

Из начальных условий следует, что $c_1 = 1, c_2 = c_3 = 0$. Поэтому при параллельном переносе конец вектора v описывает винтовую линию

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}\{cos(st), sin(st), t\}, \tag{20}$$

лежащую на прямом геликоиде, который заметается осью x^1 при параллельном переносе ее вдоль оси x^3.

Список литературы

1. И. А. Гордеева, В. И. Паньженский, С. Е. Степанов. Многообразия Римана-Картана // М. Итоги науки и техники, 2009. - Т.123. - С. 110 – 141.
2. Л. П. Эйзенхард. Непрерывные группы преобразований // М. ИЛ – 1947.
3. М. А. Марко, В. И. Паньженский. О группе автоморфизмов структуры Римана-Картана // Proce. of the Inter. Geom. Cen. 2009, Vol.2, №4. P. 51 – 56.
4. К. Яно, С. Бохнер. Кривизна и числа Бетти // М. ИЛ – 1957.
5. Я. Б. Зельдович, Н. Д. Новиков. Строение и эволюция Вселенной // М., Наука, 1975.

Владимир Иванович Паньженский

ПГПУ, Пенза, Россия

E-mail: kaf_geom@mail.ru.

Vladimir Panzhensky
PSPUniversity, Penza, Russia.

Automorphisms of Riemann-Cartan spatiotemporal diversity

It has been proved that the dimension of Lie group automorphisms of Riemann-Cartan spatiotemporal diversity $(M^4, g, \widetilde{\nabla})$ does not exceed 8. If the coherence $\widetilde{\nabla}$ is semisymmetric or antisymmetric, the maximum dimension of the group is equal to 7.

Связности Бервальда и Картана в обобщенном лагранжевом пространстве со специальной метрикой

Ольга Петровна Сурина

Аннотация Найдены канонические уравнения экстремалей, коэффициенты связности Бервальда и связности Картана обобщенного лагранжева пространства со специальной метрикой. Если лагранжиан является однородным, то связности Бервальда и Картана совпадают.

Ключевые слова Обобщенное лагранжево пространство, связность Бервальда, связность Картана.

УДК 514.76

Введение. В 1983 году в работе [1] Watanabe S., Ikeda S., Ikeda F. выделили класс обобщенных финслеровых пространств, метрика в которых определяется с помощью тензорного поля финслерова типа

$$g_{ij}(x,y) = e^{2\sigma(x,y)}\gamma_{ij}(x), \qquad (*)$$

где $\gamma_{ij}(x)$ - метрический тензор риманова пространства, а $\sigma(x,y)$ - скалярная функция на его касательном расслоении, однородная нулевой степени по координатам касательного вектора y. В 1984 году Ikeda S. в заметке [2] "О финслеровых метрических структурах гравитационного поля а затем и в работе [3] 1988 года "Теория поля в финслеровых пространствах"предложил при построении теории поля в качестве модельных рассматривать пространства с метрикой (*), при этом функция $\sigma(x,y)$ не обязательно должна иметь какую либо однородность по y. Так в работе [4] "Обобщенная теория гравитации и электромагнитные поля в пространстве

с метрикой $e^{2\sigma(x,y)}\gamma_{ij}(x)$"1992 года Miron R., Watanabe S., рассматривается случай $\sigma = \sqrt{\gamma_{ps}y^p y^s}$.

В совместной с В.И. Паньженским статье автора [5] исследовались пространства с метрикой (*), считая, что σ является произвольной функцией аргумента $\gamma_{ps}y^p y^s$. В частности, в работе было установлено, что усеченная связность Картана совпадает со связностью Леви-Чивита римановой метрики $\gamma_{ij}(x)$.

В данной работе мы исследуем более широкий класс пространств чем в работе [5], умножая метрический тензор на произвольную функцию $\varphi = \varphi(x)$ базисного многообразия.

1. Пусть M - гладкое n - мерное многообразие, TM - касательное расслоение над M, $\pi : TM \to M$ - каноническая проекция, $x \to (x^i)$ - локальные координаты на M, $z = (x, y) \to (x^i, y^i)$ - естественные локальные координаты на TM $(i, j, ... = \overline{1, n})$.

Многообразие M называют обобщенным лагранжевым пространством L^n, если на M задано симметрическое невырожденное тензорное поле g финслерова типа - метрический тензор пространства. Компоненты $g_{ij}(x, y)$ этого поля являются гладкими функциями локальных координат касательного расслоения TM. Если функции $g_{ij}(x, y)$ являются однородными нулевой степени по координатам касательного вектора y, то имеем обобщенное финслерово пространство. Если на TM существует функция F порождающая $g : g_{ij} = \dot{\partial}^2_{ij}F, \dot{\partial}_i F = \frac{\partial F}{\partial y^i}$, то L^n является лагранжевым пространством, а если эта функция однородна второй степени по координатам вектора y, то L^n есть финслерово пространство.

Рассмотрим обобщенное лагранжево пространство $L^n = (M, g)$ метрический тензор которого имеет вид

$$g_{ij} = \varphi e^{2\sigma}\gamma_{ij} \tag{1}$$

где $\varphi = \varphi(x)$ - функция на M, $\sigma = \sigma(u), u = \frac{1}{2}\gamma_{ps}y^p y^s, \gamma_{ij} = \gamma_{ij}(x)$ - метрический тензор риманова пространства $V^n = (M, \gamma)$. Экстремалями пространства L^n назовем экстремали лагранжиана $F = \frac{1}{2}g_{ij}y^i y^j$. Для метрики (1) имеем

$$F = \frac{1}{2}\varphi e^{2\sigma}\gamma_{ps}y^p y^s \tag{2}$$

Обозначим через $L = \frac{1}{2}e^{2\sigma}\gamma_{ps}y^p y^s = e^{2\sigma(u)} \cdot u$. Тогда $F = \varphi L$. Уравнения Эйлера-Лагранжа

$$\frac{\partial F}{\partial x^i} - \frac{d}{dt}(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^i}) = 0 \quad (y^i = \dot{x}^i) \tag{3}$$

в развернутом виде выглядят следующим образом

$$\frac{\partial F}{\partial x^i} - \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^i \partial x^j}\dot{x}^j - \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j}\ddot{x}^j = 0 \tag{4}$$

Для лагранжиана $\varphi(x)L(u)$ эти уравнения имеют вид

$$\partial_i \varphi L + \varphi L' \frac{1}{2}\partial_i \gamma_{00} - [\partial_j \varphi L' \gamma_{0i} + \varphi(L'' \frac{1}{2}\partial_j \gamma_{00}\gamma_{0i} + L'\partial_j \gamma_{0i})]\dot{x}^j -$$
$$-\varphi(L'\gamma_{ij} + L''\gamma_{0i}\gamma_{0j})\ddot{x}^j = 0 \tag{5}$$

Здесь и далее индекс "0"означает свертку с $\dot{x}$, т.е $\gamma_{0i} = \gamma_{pi}\dot{x}^p, \gamma_{00} = \gamma_{ps}\dot{x}^p\dot{x}^s$.

Чтобы привести эти уравнения к каноническому виду надо явно выразить $\ddot{x}^j$. Коэффициенты при $\ddot{x}^j$ образуют матрицу

$$f_{ij} = \varphi(L'\gamma_{ij} + L''\gamma_{0i}\gamma_{0j}) \tag{6}$$

Оказывается, что матрица (6) является невырожденной а обратная к ней имеет вид

$$f^{ik} = \frac{1}{\varphi L'}(\gamma^{ik} - \frac{L''}{L''\gamma_{00} + L'}\dot{x}^i\dot{x}^k) \tag{7}$$

Умножая (5) на f^{ik} и проводя необходимые преобразования, получим

$$\frac{1}{\varphi L'}(\gamma^{ik} - \frac{L''}{L''\gamma_{00} + L'}\dot{x}^i\dot{x}^k)(\partial_i \varphi L - \partial_j \varphi \dot{x}^j L'\gamma_{0i}) - (\ddot{x}^k + \Gamma^k_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j) = 0 \tag{8}$$

где Γ^k_{ij} - коэффициенты связности Леви-Чивита риманова метрического тензора γ_{ij}. Из (8) следует, что уравнения экстремалей (8) совпадают с уравнениями геодезических риманова пространства $V^n = (M, \gamma)$ если $\partial_i \varphi = 0$ т.е. когда $g_{ij} = e^{2\sigma}\gamma_{ij}$, что и было установлено в работе [6]. Уравнения (8) экстремалей пространства L^n запишем в окончательном виде

$$\ddot{x}^k + \Gamma^k_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j + \frac{1}{\varphi}\{\frac{L'^2 + LL''}{L'^2 + L'L''\gamma_{00}}\partial_j \varphi \dot{x}^j\dot{x}^k - \gamma^{pk}\partial_p \varphi \frac{L}{L'}\} \tag{9}$$

Предположим теперь, что лагранжиан F и, следовательно L является однородным степени m относительно координат $\dot{x}^i$ скоростей точки x. В силу известной теоремы Эйлера имеем: $\dot{x}^k L_{\cdot k} = mL$ или $\dot{x}^k L'\gamma_{ok} = mL$, откуда

$$\frac{L}{L'} = \frac{\gamma_{00}}{m}, L' = \frac{mL}{\gamma_{00}} = \frac{\frac{1}{2}mL}{u}, L'' = \frac{1}{2}m\frac{L'u - L}{u^2}, \frac{L'^2 + LL''}{L'^2 + L'L''\gamma_{00}} = \frac{2}{m}.$$

Подставляя в (9), получим уравнения экстремалей для однородных лагранжианов

$$\ddot{x}^k + \Gamma^k_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j + \frac{1}{\varphi m}\{2\partial_j \varphi \dot{x}^j\dot{x}^k - \gamma^{pk}\partial_p \varphi \gamma_{ps}\dot{x}^p\dot{x}^s\} = 0 \tag{10}$$

Уравнения (9) (и частный случай (10)) есть уравнения вида

$$\ddot{x}^k + 2G^k(x, \dot{x}) = 0 \tag{11}$$

Как известно (см, например [7]) величины $G^k_{ij} = \dot{\partial}^2_{ij} G^k$ -являются коэффициентами связности финслерова типа. В случае финслеровых пространств эти величины являются коэффициентами связности Бервальда. В нашем случае

$$G^k = \frac{1}{2}\Gamma^k_{ps}\dot{x}^p\dot{x}^s + \frac{1}{2\varphi}\{\frac{L'^2 + LL''}{L'^2 + L'L''\gamma_{00}}\partial_p\varphi\dot{x}^p\dot{x}^k - \gamma^{pk}\partial_p\varphi\frac{L}{L'}\} \tag{12}$$

Дифференцируя G^k дважды по координатам скорости получим коэффициенты связности Бервальда

$$G^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} + T^k_{ij} \tag{13}$$

где T^k_{ij} - тензор деформации связности Леви-Чивита Γ^k_{ij}.

Мы не будем выписывать явное выражение тензора T^k_{ij}, а рассмотрим более простой случай, когда лагранжиан является однородным. В соответствии с (10), имеем

$$G^k = \frac{1}{2}\Gamma^k_{ps}\dot{x}^p\dot{x}^s + \frac{1}{2m\varphi}(2\partial_p\varphi\dot{x}^p\dot{x}^k - \gamma^{pk}\partial_p\varphi\gamma_{ps}\dot{x}^p\dot{x}^s) \tag{14}$$

Дифференцируя G^k, будем иметь

$$\dot{\partial}_i G^k \equiv G^k_{\cdot i} = \Gamma^k_{is}\dot{x}^s + \frac{1}{2m\varphi}(2\partial_i\varphi\dot{x}^k + 2\partial_p\dot{x}^p\delta^k_i - \gamma^{pk}\partial_p\varphi 2\gamma_{is}\dot{x}^s) \tag{15}$$

и

$$G^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} + \frac{1}{m\varphi}(\partial_i\varphi\delta^k_j + \partial_j\varphi\delta^k_i - \gamma^{pk}\partial_p\varphi\gamma_{ij}) \tag{16}$$

Таким образом, в случае однородности лагранжиана коэффициенты связности не зависят от координат вектора скорости (связность Бервальда [7]).

2. Далее, естественно возникает задача построения связности Картана для метрики (1). Каноническая проекция $\pi : TM \to M$ индуцирует над TM векторное расслоение $\pi^*(TM) = \bigcup\limits_{z\in TM} T_{\pi(z)}M$, которое называется финслеровым расслоением. Множество гладких сечений из TM в $\pi^*(TM)$ обозначим через $Sec\pi^*(TM)$. Каждое такое сечение $X : TM \to \pi^*(TM)$ есть финслерово векторное поле. Локальный базис $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ векторных полей на M. является локальным базисом и финслеровых векторных полей:

$X = \xi^i(x,y)\partial_i$. Финслерово векторное поле $y : z = (x,y) \to (z,y)$ называется фундаментальным: $y = y^i\partial_i$.

Связность финслерова типа на M определяется отображением

$$\nabla : SecT(TM) \times Sec\pi^*(TM) \to Sec\pi^*(TM),$$

которое каждому векторному полю X на TM и финслерову векторному полю Y ставит в соответствие финслерово векторное поле $Z = \nabla_X Y$ (ковариантная производная от Y вдоль X). Требуется чтобы отображение ∇ обладало известными свойствами определения линейной связности по Кошулю.

Пусть на TM задана инфинитезимальная связность, т.е. распределение $H : z \to H_z$ горизонтальных площадок и $\delta_i = \partial_i - H_i^k\dot{\partial}_k$ - локальный базис векторных полей этого распределения. Если (F_{ij}^k, C_{ij}^k) - коэффициенты связности ∇, определяемые разложениями

$$\nabla_i \equiv \nabla_{\delta_i}\partial_j = F_{ij}^k\partial_k, \dot{\nabla}_i \equiv \nabla_{\dot{\partial}_i}\partial_j = C_{ij}^k\partial_k,$$

то потребовав, чтобы $F_{ij}^k = F_{ji}^k, C_{ij}^k = C_{ji}^k$ и $\nabla_X g = 0$, для всех $X \in SecT(TM)$, получим

$$F_{ij}^k = \frac{1}{2}g^{sk}(\delta_i g_{sj} + \delta_j g_{is} - \delta_s g_{ij}) \tag{18}$$

$$C_{ij}^k = \frac{1}{2}g^{sk}(\dot{\partial}_i g_{sj} + \dot{\partial}_j g_{is} - \dot{\partial}_s g_{ij}) \tag{19}$$

Векторное поле X на TM называется горизонтальным, если $\nabla_X y = 0$, где $y = y^i\partial_i$ - фундаментальное финслерово векторное поле. Если отображение ставящее каждой точке $z \in TM$ множество всех горизонтальных векторов в этой точке является инфинитезимальной связностью, то связность ∇ называется регулярной. Регулярная связность порождает инфинитезимальную связность с коэффициентами $F_{i0}^k = F_{ip}^k y^p$. Если исходная инфинитезимальная связность совпадает с инфинитезимальной связностью, порожденной регулярной финслеровой связностью, то такая связность называется связностью Картана. Связность Картана будем обозначать символом ∇^*, а ее коэффициенты - Γ_{ij}^{*k}. В этом случае $\delta_i = \partial_i - \Gamma_{i0}^{*k}\dot{\partial}_k$ и задача вычисления коэффициентов связности Картана сводится к исследованию алгебраической системы уравнений (18). Для того, чтобы система (18) имела единственное решение необходимо и достаточно, чтобы матрица

$$H_{li}^{km} = \delta_i^k\delta_l^m + \frac{1}{2}g^{kp}\dot{\partial}_l g_{sp}y^s\delta_i^m + \frac{1}{2}g^{kp}\dot{\partial}_l g_{ip}y^m - \frac{1}{2}g^{km}\dot{\partial}_l g_{si}y^s \tag{20}$$

была невырожденной [6]. Для явного выражения коэффициентов связности Картана необходимо иметь матрицу обратную к H_{li}^{km}, что существенным образом затрудняет решение задачи.

Для метрики (1) тензорная часть связности ∇^*, в соответствии с формулой (19), примет следующий вид

$$C_{ij}^k = \sigma' \cdot (\delta_j^k \gamma_{pi} y^p + \delta_i^k \gamma_{pj} y^p - y^k \gamma_{ij}) \tag{21}$$

Для получения явного выражения коэффициентов Γ_{ij}^{*k} связности Картана ∇^* исследуем условие ковариантного постоянства метрического тензора в связности ∇^*. В локальных координатах условие обращения в нуль горизонтальной ковариантной производной от метрического тензора имеет вид

$$\nabla_k^* g_{ij} \equiv \partial_k g_{ij} - \Gamma_{k0}^{*p} \dot{\partial}_p g_{ij} - \Gamma_{ki}^{*p} g_{pj} - \Gamma_{kj}^{*p} g_{ip} = 0 \tag{22}$$

Коэффициенты связности ∇^* представим в виде

$$\Gamma_{ij}^{*k} = \Gamma_{ij}^k + T_{ij}^k, \tag{23}$$

где Γ_{ij}^k - коэффициенты связности Леви-Чивита римановой метрики $\gamma_{ij}(x)$, а $T_{ij}^k = T_{ij}^k(x, y)$ - некоторый тензор финслерова типа. Для метрики (1) имеем

$$\partial_k g_{ij} = \partial_k \varphi \cdot e^{2\sigma} \gamma_{ij} + \varphi e^{2\sigma} \sigma' \partial_k \gamma_{00} \cdot \gamma_{ij} + \varphi e^{2\sigma} \partial_k \gamma_{ij} \tag{24}$$

$$\dot{\partial}_p g_{ij} = \varphi e^{2\sigma} \cdot 2\sigma' \gamma_{p0} \cdot \gamma_{ij} \tag{25}$$

Подставляя (23),(24),(25) в (22), получим

$$\partial_k \varphi \cdot e^{2\sigma} \gamma_{ij} + \varphi e^{2\sigma} \sigma' \partial_k \gamma_{00} \cdot \gamma_{ij} + \varphi e^{2\sigma} \partial_k \gamma_{ij} - (\Gamma_{k0}^p + T_{k0}^p) \varphi e^{2\sigma} \cdot 2\sigma' \gamma_{p0} \cdot \gamma_{ij} -$$
$$-(\Gamma_{ki}^p + T_{ki}^p) \varphi e^{2\sigma} \gamma_{pj} - (\Gamma_{kj}^p + T_{kj}^p) \varphi e^{2\sigma} \gamma_{ip} = 0$$

или

$$\partial_k \varphi \gamma_{ij} - T_{k0}^p \varphi 2\sigma' \gamma_{p0} \cdot \gamma_{ij} - T_{ki}^p \varphi \gamma_{pj} - T_{kj}^p \varphi \gamma_{ip} +$$
$$+\varphi \{ (\partial_k \gamma_{ij} - \Gamma_{ki}^p \gamma_{pj} - \Gamma_{kj}^p \gamma_{ip}) + \sigma' \gamma_{ij} (\partial_k \gamma_{00} - 2\Gamma_{k0}^p \gamma_{p0}) \} = 0 \tag{26}$$

Выражение в фигурных скобках равно нулю, так как ковариантная производная от риманова метрического тензора в связности Леви-Чивита обращается в нуль. Поэтому имеем

$$\sigma' T_{k0}^p \gamma_{p0} \cdot \gamma_{ij} + \frac{1}{2} (T_{ki}^p \gamma_{pj} + T_{kj}^p \gamma_{ip}) = \frac{\partial_k \varphi}{2\varphi} \gamma_{ij} \tag{27}$$

Равенство (27) умножим на $y^i y^j$. В результате получим

$$\sigma' \gamma_{00} T_{k0}^p \gamma_{p0} + \frac{1}{2} (T_{k0}^p \gamma_{p0} + T_{k0}^p \gamma_{p0}) = \frac{\partial_k \varphi}{2\varphi} \gamma_{00}, \tag{28}$$

откуда

$$T^p_{k0}\gamma_{p0} = \frac{\partial_k\varphi\gamma_{00}}{2\varphi(1+\sigma'\gamma_{00})} \tag{29}$$

Теперь (29) подставим в (27):

$$\gamma_{ij}\sigma'\frac{\partial_k\varphi\gamma_{00}}{2\varphi(1+\sigma'\gamma_{00})} + \frac{1}{2}(T^p_{ki}\gamma_{pj} + T^p_{kj}\gamma_{ip}) = \frac{\partial_k\varphi}{2\varphi}\gamma_{ij}$$

или

$$\frac{1}{2}(T^p_{ki}\gamma_{pj} + T^p_{kj}\gamma_{ip}) = \frac{\partial_k\varphi\gamma_{ij}}{2\varphi(1+\sigma'\gamma_{00})} \tag{30}$$

Циклируя (30) по i, j, k, получим еще два равенства

$$\frac{1}{2}(T^p_{ij}\gamma_{pk} + T^p_{ik}\gamma_{jp}) = \frac{\partial_i\varphi\gamma_{jk}}{2\varphi(1+\sigma'\gamma_{00})} \tag{31}$$

$$\frac{1}{2}(T^p_{jk}\gamma_{pi} + T^p_{ji}\gamma_{kp}) = \frac{\partial_j\varphi\gamma_{ki}}{2\varphi(1+\sigma'\gamma_{00})} \tag{32}$$

Складывая (30) и (31) и вычитая (32), получим

$$T^p_{ki}\gamma_{pj} = \frac{1}{2\varphi(1+\sigma'\gamma_{00})}\{\partial_k\varphi\gamma_{ij} + \partial_i\varphi\gamma_{ki} - \partial_j\varphi\gamma_{ki}\}, \tag{33}$$

откуда

$$T^l_{ki} = \frac{\gamma^{jl}}{2\varphi(1+\sigma'\gamma_{00})}\{\partial_k\varphi\gamma_{ij} + \partial_i\varphi\gamma_{ki} - \partial_j\varphi\gamma_{ki}\} \tag{34}$$

Таким образом получаем окончательный ответ

$$\Gamma^{*k}_{ij} = \Gamma^k_{ij} + \frac{\gamma^{pk}}{2\varphi(1+\sigma'\gamma_{00})}\{\partial_i\varphi\gamma_{pj} + \partial_j\varphi\gamma_{ip} - \partial_p\varphi\gamma_{ij}\} \tag{35}$$

Замечание. Естественно мы должны наложить условие: $1+\sigma'\gamma_{00} \neq 0$ или $1+2u\sigma' \neq 0$, откуда $\sigma \neq -\frac{1}{2}\ln u + c$. Если $\sigma = -\frac{1}{2}\ln u + c$, то $g_{ij} = \frac{2\varphi e^{2c}\gamma_{ij}}{\gamma_{ps}y^p y^s}$ и лагранжиан $F = \frac{1}{2}g_{ij}y^i y^j = \varphi e^{2c}$ ассоциированного лагранжева пространства вырождается: $\dot\partial^2_{ij}F = 0$.

Пусть теперь лагранжиан L является однородным степени m по $\dot x$. Вычислим выражение $1+\sigma'\gamma_{00}$ стоящее в знаменателе тензора деформации усеченной связности Картана. Применяя теорему Эйлера к лагранжиану $L = e^{2\sigma(u)}u$, будем иметь:

$$\dot x^k(e^{2\sigma}u)_{\cdot k} = me^{2\sigma}u, \dot x^k e^{2\sigma}2\sigma'\gamma_{0k}u + \dot x^k e^{2\sigma}\gamma_{0k} = me^{2\sigma}u,$$

$$4\sigma' u^2 + 2u = mu, \sigma' = \frac{m-2}{4u}, 1+\sigma'\gamma_{00} = 1 + \frac{m-2}{4u}2u = 1 + \frac{m-2}{2} = \frac{m}{2}$$

и, следовательно,

$$\Gamma^{*k}_{ij} = \Gamma^k_{ij} + \frac{\gamma^{pk}}{m\varphi}\{\partial_i\varphi\gamma_{pj} + \partial_j\varphi\gamma_{ip} - \gamma^{pk}\partial_p\varphi\gamma_{ij})\} \tag{36}$$

Таким образом, *если лагранжиан L является однородным, то усеченная связность Картана совпадает со связностью Бервальда.*

Список литературы

1. S. Watanabe, S. Ikeda, F. Ikeda. On a metrical Finsler connections of generalized Finsler metric $g_{ij} = e^{2\sigma(x,y)}\gamma_{ij}(x)$ // Tensor – 1983. - 40. - p. 97 – 102.
2. Л. П. Эйзенхард. Непрерывные группы преобразований // М. ИЛ – 1947. S. Ikeda. On the Finslerian metrical structures of the gravitational field // An. sti. Univ.Iasi. – 1984, Sec 1a, 30, N4. - p.35 – 38.
3. S. Ikeda. Theory of Fields in Finsler Spaces // Semin. mec. Univ. Timisoara. - 1988, N 8. - p.1 – 43.
4. R. Miron, S. Watanabe. Geometric theory of gravitations and electronics fields in the metric $e^{2\sigma(x,y)}\gamma_{ij}(x)$ // Mem. Sec. sti. ser.4 / Acad. RSR - 1992(1994) -15, N1. - p.9 –23.
5. В. И. Паньженский, О. П. Сурина Об одном классе обобщенных лагранжевых пространств // Движение в обобщенных пространствах. Межвузовский сборник научных трудов. Пенза, 2002, с. 183 – 189.
6. В. И. Паньженский. Инфинитезимальные автоморфизмы метрических структур финслерова типа // Итоги науки и техники. М. 2009. Т. 123. с. 81 – 109.
7. Х. Рунд. Дифференциальная геометрия финслеровых пространств. М., Наука, 1981.

Ольга Петровна Сурина

ПГПУ, Пенза, Россия

E-mail: kaf_geom@mail.ru.

Olga Surina

PSPUniversity, Penza, Russia.

Berwald and Cartan coherences in the generic Lagrangian space with the special metrics

There have been revealed accepted equations of extremals, Berwald coherence parameters and Cartan coherence parameters of the generic Lagrangian space with the special metrics.

If the Lagrangian is homogeneous, Berwald and Cartan coherences coincide.

Про кількість розв'язків однієї системи алгебраїчних рівнянь

В.А. Кіосак

Анотація Вивчається перевизначена система алгебраїчних рівнянь. Кількість незалежних компонент загального розв'язку системи має велике значення для оцінки лакун в розподілі степенів мобільності ріманових просторів відносно геодезичних відображень та інших дифеоморфізмів узагальнених просторів

Ключові слова Ріманові простори, геодезичні відображення, системи алгебраїчних рівнянь

УДК 514.765.1+512.813.4

1 Вступ

Загально визнаним в диференціальній геометрії є метод дослідження геометричних об'єктів та їх властивостей зведенням до розгляду диференціальних рівнянь.

В свою чергу, дослідження якісної теорії диференціальних рівнянь зводиться до розгляду умов інтегрування, що носять алгебраїчний характер [1]. Не є винятком і теорія геодезичних відображень (ГО) ріманових просторів . Основні рівняння теорії ГО — це система диференціальних рівнянь в коваріантних похідних першого порядку типу Коші [2].

Вивчення кількості суттєвих параметрів в загальному розв'язку цієї системи зводиться до визначення незалежних компонент тензора в умовах інтегрованості цієї системи, записаних з урахуванням тотожності Річчі [3]–[4]. Останні, також зводяться до допоміжного рівняння, що і є об'єктом вивчен-

ня в даній роботі. Дослідження ведуться в ріманових просторах $V_n (n > 3)$, відмінних від просторів сталої кривини, без обмежень на знаковизначеність метрики g_{ij}.

2 Основна частина

Оцінимо кількість незалежних компонент симетричного, невиродженого тензора a_{ij}, що задовольняє рівнянню

$$a_{\alpha i} K_j^\alpha + a_{\alpha j} K_i^\alpha = 0. \tag{1}$$

Тут K_j^h - деякий афінор, незалежний від a_{ij}, крім того припускаємо, що він задовольняє умові

$$g_{\alpha i} K_j^\alpha + g_{\alpha j} K_i^\alpha = 0. \tag{2}$$

Умова (2) означає, що тензор $K_{ij} \overset{def}{=} K_j^\alpha g_{\alpha i}$ є кососиметричним.

Нехай r^* — число, рівне $3n - 5$ для ріманових просторів V_n, $n \neq 4, 6$, а у випадку $n = 4$ або 6 рівне $3n - 6$.

Доведемо наступну теорему

Теорема 1 *Якщо ранг матриці $\left\| K_j^i \right\|$ більше двох, то серед компонент тензора a_{ij} не менше чим r^* залежить від інших компонент тензора a_{ij} і афінора K_j^i.*

Доведення цієї теореми проводитимемо в деякій фіксованій точці $M(x^h) \in V_n$. Розглянемо лінійне невироджене перетворення координат в цій точці

$$y^h = A_\alpha^h x^\alpha,$$

де $det \left\| A_i^h \right\| \neq 0$.

Тензори a_{ij} та K_h^i перетворяться згідно із законом

$$a_{ij} = a_{\alpha\beta} B_i^\alpha B_j^\beta; \qquad K_i{}^h = K_\beta^\alpha B_i^\beta B_\alpha^h,$$

тут $\left\| B_i^h \right\| \overset{def}{=} \left\| A_i^h \right\|^{-1}$.

Очевидно, що ранг тензора K_i^h, а також число залежних компонент тензора a_{ij} в рівнянні (1) є інваріантними відносно перетворення координат. Останнє вірно і у тому випадку, коли $\left\| A_i^h \right\|$ являється комплекснозначною невиродженою матрицею.

Для подальших досліджень приведемо афінор K_h^i за допомогою невиродженого перетворення (випадок комплексного перетворення не виключається) до канонічної форми Жордана. У нашому дослідженні ми обмежимося спрощенішим записом цієї матриці:

$$K_i^h = \begin{pmatrix} \omega_1 & K_2^1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2 & K_3^2 & \dots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \omega_{n-1} & K_n^{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \omega_n \end{pmatrix} \tag{3}$$

де $K_{\alpha+1}^{\alpha} = 0$ або 1.

Останнє можна записати таким чином

$$K_\alpha^\alpha = \omega_\alpha; \qquad K_\alpha^{\alpha+1} = 0, 1; \qquad K_b^a = 0 \qquad \text{для} \qquad b \neq a,\ a+1.$$

Тут $a, b = 1, 2, \dots, n$. В цій формулі, як і в усій роботі, по однакових індексах сумування не робиться.

Природно, що в загальному випадку власні числа ω_α матриці K_i^h можуть бути комплексними. Систему координат y, в якій K_i^h має форму Жордана, назвемо канонічною.

Рівняння системи (1) з фіксованими індексами i і j позначимо через Ω_{ij}, оскільки рівняння Ω_{ji} співпадає з рівнянням Ω_{ij}, система (1) еквівалентна системі рівнянь

$$\Omega: \qquad \Omega_{ij} (i \leq j;\ i, j = 1, 2, \dots, n).$$

Рівняння (1) в канонічній системі координат y мають наступну форму:

$$\Omega_{ij}(i, j < n): \ a_{ij}(\omega_i + \omega_j) + a_{i+1\,j} K_i^{i+1} + a_{ij+1} K_j^{j+1} = 0 \tag{4}$$

$$\Omega_{in}(i < n): \ a_{in}(\omega_i + \omega_n) + a_{i+1\,n} K_j^{i+1} = 0 \tag{5}$$

$$\Omega_{nn}: \ a_{nn}(\omega_n + \omega_n) = 0 \tag{6}$$

Нагадаємо, що у рівняннях (4) і (5) правило Ейнштейна не застосовується. Заздалегідь доведемо наступні леми:

Лема 1 *Компоненти симетричного тензора a_{ij}, для яких $(\omega_i + \omega_j) \neq 0$, залежать від інших компонент тензора a_{ij} і афінора K^i_j.*

Доведення Множина впорядкованих пар індексів (i, j), де $i \leq j$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, позначимо через I. Через I_1 і I^* позначимо підмножини I такі, що

$$(i, j) \in I_1 \Leftrightarrow (\omega_i + \omega_j) \neq 0 \qquad i \qquad I^* = I \backslash I_1.$$

Кількість елементів I_1 позначимо через q. Нижче доведемо, що q компонент a_{ij}, де $(i, j) \in I_1$, явно виражаються через інші компоненти тензора a_{ij} і афінора K^h_i.

Крок 1. З множини пар I_1 виберемо пару (i_1, j_1) таку, що індекси i_1 і j_1 є "максимальними". Коректніше:

$$i_1 = \underset{\forall (i,j) \in I_1}{max}\ i \qquad i \qquad j_1 = \underset{\forall (i,j) \in I_1}{max}\ j\ .$$

Тоді неважко бачити, що аналізом рівняння $\Omega_{i_1 j_1}$ (див. (4), (5), (6)) можна явним чином виразити компоненту $a_{i_1 j_1}$ через компоненти $a_{ij} \in I^*$, і K^h_i.

Крок 2. Далі позначимо через $I_2 \overset{def}{=} I_1 \backslash \{(i_1, j_1)\}$. Аналогічно, з множини пар I_2 виберемо "максимальну" пару (i_2, j_2):

$$i_2 = \underset{\forall (i,j) \in I_2}{max}\ i \qquad i \qquad j_2 = \underset{\forall (i,j) \in I_2}{max}\ j\ .$$

Тоді неважко бачити, що аналізом рівняння $\Omega_{i_2 j_2}$ (див. (4), (5)) можна явним чином виразити компоненту $a_{i_2 j_2}$ через компоненту $a_{i_1 j_1}$ і компоненти a_{ij}, $(i, j) \in I^*$ і K^h_i. Але тоді на підставі 1-го кроку витікає, що і $a_{i_2 j_2}$ виражається явним чином тільки через компоненти a_{ij}, $(i, j) \in I^*$ і K^h_i.

Процес продовжуємо аналогічно. Після q кроків переконаємося, що усі компоненти a_{ij}, для яких $(i, j) \in I_1$, явним чином виражаються тільки через компоненти a_{ij}, $(i, j) \in I^*$ і афінора K^h_i.

Лема доведена.

На підставі леми 1 можемо довести наступну лему, яка потрібна для доказу теореми.

Лема 2 *Якщо число залежних компонент тензора a_{ij} не перевершує числа r^*, то серед чисел ω_i не більше двох відмінних від нуля.*

Доведення Доказ проведемо методом від протилежного. Припустимо, що існує принаймні три ненульові числа $\omega_a, \omega_b, \omega_c$ (тут a, b, c — взаємно відмінні індекси; після перенумерації індексів, можна вважати $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$).

Покажемо, що при цьому припущенні хоч би $3n-5$, а у випадку $n=4,6$ хоч би $3n-6$ компонент тензора a_{ij} залежить від інших компонент цього тензора і афінора K_i^h (це число ми позначили через r^*). Враховуючи лему 1, для цього досить, щоб серед елементів трикутної матриці ω:

$$\omega = \begin{pmatrix} \omega_1+\omega_1 & \omega_1+\omega_2 & \dots & \omega_1+\omega_n \\ 0 & \omega_2+\omega_2 & \dots & \omega_2+\omega_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \omega_n+\omega_n \end{pmatrix}$$

знайшлося, принаймні, r^* ненульових елементів.

1. Спочатку розглянемо випадок, коли ненульові власні числа ω_1, ω_2, ω_3 задовольняють умові

$$|\omega_1| \neq |\omega_2| \neq |\omega_3|\,.$$

Тоді не дорівнюють нулю числа

$$\omega_1+\omega_1, \qquad \omega_1+\omega_2, \qquad \omega_1+\omega_3, \qquad \omega_2+\omega_2, \qquad \omega_2+\omega_3, \qquad \omega_3+\omega_3,$$

а для $a>3$:

а) якщо $\omega_a = \pm\omega_1$, то не дорівнюють нулю

$$\omega_2+\omega_a; \qquad \omega_3+\omega_a; \qquad \omega_a+\omega_a;$$

б) якщо $\omega_a = \pm\omega_2$, то не дорівнюють нулю

$$\omega_1+\omega_a; \qquad \omega_3+\omega_a; \qquad \omega_a+\omega_a;$$

в) якщо $\omega_a = \pm\omega_3$, то не дорівнюють нулю

$$\omega_1+\omega_a; \qquad \omega_2+\omega_a; \qquad \omega_a+\omega_a;$$

г) якщо $\omega_a \neq \pm\omega_1, \pm\omega_2, \pm\omega_3$, то не дорівнюються нулю

$$\omega_1+\omega_a; \qquad \omega_2+\omega_a; \qquad \omega_3+\omega_a.$$

Звідси на підставі леми 1 витікає, що серед компонент a_{ij} принаймні $3n-3$ компонент залежних, що суперечить умові $r^* \geq 3n-3$.

2. Розглянемо випадок, коли ненульові власні числа ω_1, ω_2, ω_3 задовольняють умові

$$\omega_1 = -\omega_2, \qquad \omega_3 \neq \pm\omega_1 \qquad \text{і} \quad \text{для } \forall a > 3: \ \ \omega_a = \pm\omega_1, \pm\omega_3, 0.$$

Інше значення ω_a нас приводить до розгляду п. 1.
В цьому випадку не дорівнюють нулю числа

$$\omega_1 + \omega_1, \qquad \omega_1 + \omega_3, \qquad \omega_2 + \omega_2, \qquad \omega_2 + \omega_3, \qquad \omega_3 + \omega_3,$$

а для $a > 3$:

а) якщо $\omega_a = 0$, то не дорівнюються нулю

$$\omega_1 + \omega_a; \qquad \omega_2 + \omega_a; \qquad \omega_3 + \omega_a;$$

б) якщо $\omega_a = \omega_1$, то не дорівнюються нулю

$$\omega_1 + \omega_a; \qquad \omega_3 + \omega_a; \qquad \omega_a + \omega_a;$$

в) якщо $\omega_a = -\omega_1$, то не дорівнюються нулю

$$\omega_2 + \omega_a; \qquad \omega_3 + \omega_a; \qquad \omega_a + \omega_a;$$

г) якщо $\omega_a = \pm\omega_3$, то не дорівнюються нулю

$$\omega_1 + \omega_a; \qquad \omega_2 + \omega_a; \qquad \omega_a + \omega_a.$$

Звідси на підставі леми 1 витікає, що серед компонент a_{ij} принаймні $3n - 4$ компонент залежних, що суперечить умові $r^* \geq 3n - 4$.

3. Розглянемо випадок, коли ненульові власні числа ω_1, ω_2, ω_3 задовольняють умові

$$\omega_1 = \omega_2, \qquad \omega_3 \neq \pm\omega_1 \qquad i \qquad \forall a > 3: \ \ \omega_a = \omega_1, \pm\omega_3, 0.$$

Значення $\omega_a \neq \pm\omega_1, \pm\omega_2$, нас приводить до розгляду п.1, а значення $\omega_a = -\omega_1$ — приводить до п.2. В цьому випадку не дорівнюють нулю числа

$$\omega_1 + \omega_1, \qquad \omega_2 + \omega_3, \qquad \omega_1 + \omega_3, \qquad \omega_2 + \omega_2, \qquad \omega_2 + \omega_3, \qquad \omega_3 + \omega_3,$$

а для $a > 3$:

а) якщо $\omega_a = 0$, то не дорівнюються нулю

$$\omega_1 + \omega_a; \qquad \omega_2 + \omega_a; \qquad \omega_3 + \omega_a;$$

б) якщо $\omega_a = \omega_1, \pm\omega_3$, то не дорівнюються нулю

$$\omega_1 + \omega_a; \qquad \omega_3 + \omega_a; \qquad \omega_a + \omega_a.$$

Звідси на підставі леми 1 витікає, що серед компонент a_{ij} принаймні $3n-3$ компонент залежних, що суперечить умові $r^* \geq 3n-3$.

4. Очевидно, залишилося розглянути випадок, коли

$$\omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega_k = -\omega_{k+1} = -\omega_{k+2} = \ldots = -\omega_{k+l} \neq 0,$$

$$\omega_{k+l+1} = \ldots = \omega_n = 0.$$

В цьому випадку кількість ненульових чисел $\omega_i + \omega_j$ $(i \leq j)$ рівна

$$\frac{k(k+1)}{2} + \frac{l(l+1)}{2} + (k+l)(n-k-l).$$

Безпосереднім аналізом можна встановити:

а) коли

$$\left\{\begin{matrix} n=4 & i & \omega_1 = \omega_2 = -\omega_3 = -\omega_4 \neq 0, \\ n=6 & i & \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = -\omega_4 = -\omega_5 = -\omega_6 \neq 0 \end{matrix}\right\},$$

то принаймні $3n-6$ компонент a_{ij} залежних, що узгоджується із твердженням леми.

б) у інших випадках, коли $k+l > 2$, серед компонент a_{ij} принаймні $3n-5$ компонент залежних, що також узгоджується із твердженням леми.

У результаті, нами розглянуті усі можливі випадки і, таким чином, лема 2 доведена.

На підставі попередніх лем доведемо раніше сформульовану теорему.

Доведення Для доказу нам досить показати, що, якщо число залежних компонент тензора a_{ij} менше або рівно $3n-5$ для $n \neq 4, 6$ і $3n-6$ для $n = 4, 6$, то матриця тензора K^i_j має не більше двох лінійно незалежних рядків.

Доказ проведемо методом від протилежного. Надалі припускатимемо, що в матриці K^i_j, приведеній до форми Жордана (3), принаймні, три ненульові рядки. Враховуючи лему 2 і можливість перестановки клітин Жордана, досить розглянути наступних сім випадків:

1). $\omega_1, \omega_2 \neq 0$, $\omega_a = 0$, для $a = \overline{3,n}$, $K^4_3 = 1$;

2). $\omega_1 \neq 0$, $\omega_a = 0$, для $a = \overline{2,n}$, $K^3_2 = K^4_3 = 1$;

3). $\omega_1 \neq 0$, $\omega_a = 0$, для $a = \overline{2,n}$, $K^3_2 = 1$, $K^4_3 = 0$, $K^5_4 = 1$;

4). $\omega_a = 0$, для $a = \overline{1,n}$, $K_1^2 = K_2^3 = K_3^4 = 1$;
5). $\omega_a = 0$, для $a = \overline{1,n}$, $K_1^2 = K_2^3 = 1$, $K_3^4 = 0$, $K_4^5 = 1$;
6). $\omega_a = 0$, для $a = \overline{1,n}$, $K_1^2 = 1$, $K_2^3 = 0$, $K_3^4 = K_4^5 = 1$;
7). $\omega_a = 0$, для $a = \overline{1,n}$, $K_1^2 = 1$, $K_2^3 = 0$, $K_3^4 = 1$, $K_4^5 = 0$, $K_5^6 = 1$.

Нехай $\omega_1 \neq 0, \omega_2 \neq 0$, і $\omega_a = 0$, для усіх $a = \overline{3,n}$, і $K_3^4 = 1$, тоді матриця K_j^i має вигляд

$$K_j^i = \begin{pmatrix} \omega_1 & K_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_3^4 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & K_{n-1}^n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Очевидно, що числа $\omega_1 + \omega_a$, $\omega_2 + \omega_a$ (для $\forall a > 2$) відмінні від нуля і, отже, через лему 1 компонент a_{1a} $(a \neq 2)$, a_{2a} $(a \neq 1)$ залежать від інших компонент матриці a_{ij}.

Поклавши в (4) $i = j = 3$, знаходимо, що $a_{34} = 0$. З (5) при $i = 3$ витікає, що $a_{4n} = 0$.

Формула (4) при $i = 3$, $j = s \neq 1, 2, 3, n$ набирає вигляду

$$a_{4s} + a_{3\,s+1} K_s^{s+1} = 0.$$

Після неважкого аналізу переконаємося, що серед компонент тензора a_{ij} не менше чим $3n - 4$ залежних. Саме ними є компоненти a_{1a} $(a = 1, 3, 4, \dots, n)$, a_{2a} $(a = 2, 3, 4, \dots, n)$ і a_{4a} $(a = 3, 4, \dots, n)$.

2) Розглянемо другий випадок. Оскільки $\omega_1 + \omega_a$ $(a = \overline{1,n})$ не дорівнюють нулю, то на підставі леми 1 компоненти a_{1a} $(a = \overline{1,n})$ виражаються через інші компоненти матриці a_{ij}.

З (5) при $i = 2, 3$, витікає $a_{3n} = a_{4n} = 0$.

Формула (4) при $i = 2$, $j = s$ $(s = \overline{2, n-1})$ дає

$$a_{3s} = -a_{2\,s+1} K_s^{s+1}, \tag{7}$$

а при $i = 3$, $j = s$ $(s = \overline{3, n-1})$ дає

$$a_{4s} = -a_{3\,s+1} K_s^{s+1}. \tag{8}$$

Отже, a_{1a} $(a = 1, 2, \dots, n)$, a_{3a} $(a = 2, 3, \dots, n)$ і a_{4a} $(a = 4, 5, \dots, n)$ залежать від інших компонент тензора a_{ij}, тобто серед компонент a_{ij} не менше ніж $3n - 4$ залежних.

3) Третій випадок аналогічний другому. Легко бачити, що компоненти a_{1a} $(a = \overline{1,n})$, виражаються через інші компоненти матриці a_{ij}.

З (5) при $i = 2, 4$, витікає, $a_{3n} = a_{5n} = 0$.

Формула (4) при $i = 2$, $j = s$ $(s = \overline{2, n-1})$ дає

$$a_{3s} = -a_{2\,s+1} K_s^{s+1}, \tag{9}$$

а при $i = 4$, $j = s$ $(s = \overline{4, n-1})$ дає

$$a_{5s} = -a_{4\,s+1} K_s^{s+1}. \tag{10}$$

Отже, a_{1a} $(a = 1, 2, \ldots, n)$, a_{3a} $(a = 2, 3, \ldots, n)$ *і* a_{5a} $(a = 4, 5, \ldots, n)$ залежать від інших компонент тензора aij, тобто серед компонент aij не менше чим $3n - 4$ залежних.

4, 5, 6 і 7 випадки подібним аналізом рівнянь (4) і (5) призводять до того, що серед компонент aij не менше чим $3n - 5$ залежних. Обмежимося тільки розглядом рівнянь (4) і (5), які призводять до такого висновку:

Випадок 4: при $i = 1, 2, 3$; випадок 5: при $i = 1, 2, 4$; випадок 6: при $i = 1, 3, 4$; випадок 7: при $i = 1, 3, 5$.

Отож, в усіх випадках нами отримано протиріччя, яке доводить справедливість теореми.

3 Висновки

Таким чином, вивчивши в спеціальній системі координат кількість залежних компонент тензора a_{ij}, в відмінному від простору сталої кривини, рімановому просторі нами доведена теорема, що має важливе значення для оцінки степені мобільності простору відносно геодезичних відображень.

Література

1. Петров А. З. Новые методы в общей теории относительности.-М.:Наука, 1966. - 495с.
2. Синюков Н. С. Геодезические отображения римановых пространств. - М.: Наука, 1979. - 255 с.
3. Kiosak V.A., Matveev V.S. Proof of the Projective Lichnerowicz Conjecture for Pseudo-Riemannian Metrics with Degree of Mobility Greater than Two//Communications in Mathematical Physics, Springer — 297. — 2010. — P. 401-426
4. Kiosak V.A., Matveev V.S. Complete Einstein metrics are geodesically rigid //Communications in Mathematical Physics, Springer — 289. — №1. —2009. — P. 383–400

В.А. Кіосак
Одеський національний політехничний університет, Одеса, Україна.
E-mail: vkiosak@ukr.net

Volodimir Kiosak

On the number of solutions for the system of algebraic equations

We study the system of over-defined algebraic equations. A number of independent components of general solution for the system are really important for estimation of lacunae in the distribution of the mobility degrees for Riemannian spaces in relation to geodesic mappings and other diffeomorphisms of generalized manifolds.

Геометрическая форма фронта пламени и неустойчивость горения в круглой трубе

Виктор Эдуардович Волков

Аннотация Аналитически решена задача об устойчивости плоского пламени, распространяющегося в круглой трубе. Математически обоснована геометрическая форма (ячеистая структура) пламени, возникающая в результате развития неустойчивости.

Ключевые слова пламя, фронт пламени, неустойчивость горения, ячеистая структура пламени.

УДК $532.5 + 536.464$

Как показывают многочисленные эксперименты, пламя, распространяющееся в хорошо перемешанной горючей газовой смеси, в результате автотурбулизации приобретает сложную пульсационную пространственно-временную структуру. Важнейшей геометрической характеристикой фронта горения является размер ячейки пламени, позволяющий оценить столь важный для технических приложений параметр как гасящее расстояние, а также уточнить пределы горения по начальному давлению и по концентрации горючего.

Построенная в работах $[1-3]$ теория неустойчивости нормального горения позволяет объяснить $[2,3]$ наблюдаемую в экспериментах ячеистую структуру пламени $[4-6]$ и рассчитать размер пламенной ячейки. Однако, рассматриваемая в $[1-3]$ модель горения предполагает, что процесс развивается в неограниченном объеме, в то время как ячеистая геометрия фронта пламени наблюдается и при горении газовых смесей в круглых трубах $[5,7,8]$. Цель настоящего исследования состоит в обосновании корректности

применения теории гидродинамической неустойчивости $[1-3]$ для горения, распространяющегося в круглой цилиндрической трубе.

Рассмотрим следующую математическую модель горения. В направлении оси z в области исходной горючей смеси 1 ($z < 0$) течёт идеальный (невязкий) газ с постоянной достаточно малой дозвуковой скоростью, величина которой позволяет считать среду несжимаемой. Плоскости $z = 0$ соответствует фронт пламени (сильный разрыв), за которым находится зона продуктов сгорания 2 ($z > 0$). Газ течет в круглой цилиндрической трубе радиуса r_0 (Рис. 1).

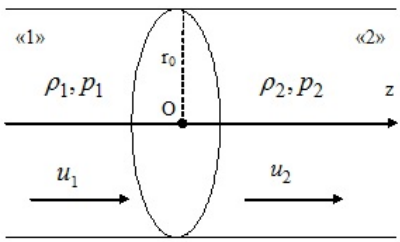

Рис. 1. Модель стационарного пламени в круглой трубе

Физические параметры газа в исходной горючей смеси 1 и в продуктах сгорания 2 связаны законами сохранения массы и импульса:

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2, \tag{1}$$

$$p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2. \tag{2}$$

Течение среды описывается системой уравнений Эйлера и неразрывности (несжимаемости), которая в цилиндрических координатах r, φ, z имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{u_\varphi^2}{r} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} = 0, \\ \frac{\partial u_\varphi}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + u_z \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{u_r u_\varphi}{r} + \frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \varphi} = 0, \\ \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r}\frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{u_r}{r} = 0, \end{cases} \tag{3}$$

где

u_r – радиальная составляющая вектора скорости;

u_φ – азимутальная составляющая вектора скорости;

u_z – аксиальная составляющая вектора скорости;

p – давление;

ρ - плотность.

Исследуем устойчивость стационарного (постоянного) решения системы (3) по отношению к малым возмущениям p'_j, u'_{jr}, $u'_{j\varphi}$, u'_{jz} давления, а также радиальной, тангенциальной и аксиальной компонент вектора скорости соответственно, в зоне исходной горючей смеси ($j = 1$) и в продуктах сгорания ($j = 2$). Эти возмущения описываются следующей системой линейных однородных дифференциальных уравнений с частными производными:

$$\begin{cases} \frac{\partial u'_{jr}}{\partial t} + u_j \frac{\partial u'_{jr}}{\partial z} + \frac{1}{\rho_j} \frac{\partial p'_j}{\partial r} = 0, \\ \frac{\partial u'_{j\varphi}}{\partial t} + u_j \frac{\partial u'_{j\varphi}}{\partial z} + \frac{1}{\rho_j r} \frac{\partial p'_j}{\partial \varphi} = 0, \\ \frac{\partial u'_{jz}}{\partial t} + u_j \frac{\partial u'_{jz}}{\partial z} + \frac{1}{\rho_j} \frac{\partial p'_j}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial u'_{jr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u'_{j\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial u'_{jz}}{\partial z} + \frac{u'_{jr}}{r} = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Частные решения системы (4) имеют вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial u'_{jr}}{\partial u_1} = r_0 \mu_{nk}^{-1} \frac{d}{dr} \ln J_n(\mu_{nk} r r_0^{-1}) F(r,\varphi,t) \Bigg[- \frac{1}{\frac{\zeta}{\mu_{nk}\delta_j}+1} A_{j1} e^{\mu_{nk} r_0^{-1} z} - \\ \qquad - \frac{1}{\frac{\zeta}{\mu_{nk}\delta_j}-1} A_{j2} e^{-\mu_{nk} r_0^{-1} z} + A_{j3} e^{-\frac{\zeta}{\delta_j} r_0^{-1} z} \Bigg], \\ \frac{\partial u'_{j\varphi}}{\partial u_1} = i r_0 r^{-1} \mu_{nk}^{-1} n F(r,\varphi,t) \Bigg[- \frac{1}{\frac{\zeta}{\mu_{nk}\delta_j}+1} A_{j1} e^{\mu_{nk} r_0^{-1} z} - \\ \qquad - \frac{1}{\frac{\zeta}{\mu_{nk}\delta_j}-1} A_{j2} e^{-\mu_{nk} r_0^{-1} z} + A_{j3} e^{-\frac{\zeta}{\delta_j} r_0^{-1} z} \Bigg], \\ \frac{\partial u'_{jz}}{\partial u_1} = F(r,\varphi,t) \Bigg[- \frac{1}{\frac{\zeta}{\mu_{nk}\delta_j}+1} A_{j1} e^{\mu_{nk} r_0^{-1} z} + \frac{1}{\frac{\zeta}{\mu_{nk}\delta_j}-1} A_{j2} e^{-\mu_{nk} r_0^{-1} z} - \\ \qquad - \frac{\mu_{nk}\delta_j}{\zeta} A_{j3} e^{-\frac{\zeta}{\delta_j} r_0^{-1} z} \Bigg], \\ \frac{p'_j}{\rho_1 u_1^2} = F(r,\varphi,t) \Bigg[A_{j1} e^{\mu_{nk} r_0^{-1} z} + A_{j2} e^{-\mu_{nk} r_0^{-1} z} \Bigg], \end{cases} \tag{5}$$

где

$$F(r,\varphi,t) = J_n(\mu_{nk} r r_0^{-1}) \exp(in\varphi - i\omega t), \tag{6}$$

μ_{nk} - k-ый корень уравнения $\frac{dJ_n(x)}{dx} = 0$, J_n - функция Бесселя первого рода n-го порядка,

$$\zeta = -\frac{i\omega r_0}{u_1}, \tag{7}$$

$$\delta_j = \frac{\rho_1}{\rho_j} = \frac{u_j}{u_1}, \tag{8}$$

$A_{jl}(l = 1, 2, 3)$ - неопределенные константы.

Решения (5) удовлетворяют граничному условию на жесткой стенке ($u'_{jr} = 0$ при $r = r_0$), а также условиям регулярности при $r \to 0$ и периодичности по φ.

Условие ограниченности возмущений на бесконечности (при $z \to \pm\infty$) обеспечивается соотношением $A_{12} = A_{13} = A_{21} = 0$. Уравнение возмущённой поверхности фронта пламени задается в виде

$$z = \varepsilon(r, \varphi, t), \tag{9}$$

где

$$\varepsilon = A_{00} r_0 F(r, \varphi, t), \tag{10}$$

причем A_{00} – неопределенная константа, а функция $F(r, \varphi, t)$ задана соотношением (6).

На фронте пламени справедливы законы сохранения массы и импульса, которые в линейном приближении могут быть представлены как

$$\rho_1 u'_{1z} - \rho_2 u'_{2z} = \big(\rho_1 - \rho_2\big)\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}, \tag{11}$$

$$u'_{1r} - u'_{2r} = \big(u_2 - u_1\big)\frac{\partial \varepsilon}{\partial r}, \tag{12}$$

$$u'_{1\varphi} - u'_{2\varphi} = \frac{1}{r}\big(u_2 - u_1\big)\frac{\partial \varepsilon}{\partial \varphi}, \tag{13}$$

$$p'_1 + 2\rho_1 u_1 u'_{1z} = p'_2 + 2\rho_2 u_2 u'_{2z}, \tag{14}$$

при $z = 0$.

Дополнительным граничным условием на фронте является условие неизменности скорости нормального горения (условие Ландау [1, 9]):

$$u'_{1z} - \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = 0, \tag{15}$$

при $z = 0$.

Подстановка выражений (5) и (9) в граничные условия (11)$^{\smile}$(15) с учетом условия возмущений на бесконечности сводит задачу на собственные значения к характеристическому уравнению Ландау

$$\left(1 + \frac{1}{\delta}\right)\theta^2 + 2\theta + (1 - \delta) = 0 \tag{16}$$

относительно безразмерной величины

$$\theta = \frac{\zeta}{\mu_{nk}} \tag{17}$$

Уравнение (16) имеет неустойчивый корень

$$\theta = \frac{\delta}{1+\delta}\left(-1+\sqrt{1+\delta-\frac{1}{\delta}}\right), \qquad (\theta > 0), \tag{18}$$

где $\delta = \delta_2 = \frac{\rho_1}{\rho_2} > 1$. При этом очевидно, что, в отличие от плоского случая [1], безразмерное собственное число имеет вид

$$\theta = -\frac{i\omega r_0}{u_1 \mu_{nk}}. \tag{19}$$

Соотношения (16)$\breve{}$(18) доказывают корректность рассуждений Ландау не только для плоского фронта пламени, распространяющегося в открытом пространстве, но и для горения в круглой цилиндрической трубе. При этом спектр волн возмущений является не непрерывным (как в случае открытого пространства [1 – 3]), а дискретным, так как возмущения задаются в виде $\sim J_n(\mu_{nk} r r_0^{-1}) \exp(in\varphi - i\omega t)$. Развитие неустойчивости волны горения, приводит к автотурбулизации и самоускорению пламени, что представляет собой потенциальную угрозу дефлаграционного или детонационного взрыва. Все сделанные выводы – с учетом дискретизации спектра длин неустойчивых волн – справедливы не только для открытых, но также для закрытых и полуоткрытых круглых цилиндрических труб.

Список литературы

1. Л. Д. Ландау. К теории медленного горения // Журнал экспериментальной и теоретической физики, 1944. – Т.14, №6. – С. 240 – 244.
2. С. К. Асланов, В. Э. Волков. Интегральный метод анализа устойчивости ламинарного пламени // Физика горения и взрыва, 1991. – Т. 27, №5. – С. 44 – 50.
3. S. Aslanov, V. Volkov. On the instability and cell structure of flames // Archivum combustionis. 1992. – Vol. 12, Nr. 1-4. – P. 81 – 90.
4. Я. К. Трошин, К. И. Щелкин. Структура фронта шаровых пламен и неустойчивость нормального горения // Изв. АН СССР. ОТН, 1955. – № 9. – С. 160 -– 166.
5. Дж. Г. Маркштейн Нестационарное распространение пламени. // М: Мир, 1968. – 440 с.
6. Л. А. Гуссак, Е. Н. Спринцина, К. И. Щелкин. Исследование устойчивости фронта нормального пламени // Физика горения и взрыва, 1968. – Т. 4, №3. – С. 358 – 366.
7. Я. Б. Зельдович, Г. И. Баренблатт, В. Б. Либрович, Г. М. Махвиладзе. Математическая теория горения и взрыва // М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1980. – 478 с.
8. И. Н. Зверев, Н. Н. Смирнов. Газодинамика горения // М.: Изд-во МГУ, 1987. – 307 с.
9. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Теоретическая физика. В 10 т.: Т. VI. Гидродинамика // М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. 736 с.

Виктор Эдуардович Волков
ОНАПТ, Одесса, Украина
E-mail: viktor@te.net.ua

Victor Volkov
ONAFT, Odessa, Ukraine.

Geometrical shape of the flame front and instability of the combustion in a round tube

Stability problem is solved analytically for the plane flame, which propagates in a round tube. Geometrical shape (cell structure) of the flame, which is a result of instability development, is substantiated mathematically.

Українською, російською та англійською мовою

Зареєстровано Міністерством юстиції України

Свідоцтво : Серія КВ № 13819 - 2793Р від 19.11.2007

Журнал є науковим фаховим виданням України в галузі математичних наук
(перелік № 1-05/3 від 14.04.2010 // Бюлетень ВАК України. 2010. № 4)

Наклад 300 примірників. Зам. № 319.

Адреса редакції:
Одеська національна академія харчових технологій,
кафедра вищої математики,
вул. Канатна, 112, м. Одеса, 65 039 Україна
E-mail: geom-odessa@ukr.net
website: http://www.onaft.edu.ua/?view=journal4

Надруковано з готового оригінал-макета
Видавництво і друкарня "Екологія"
65045, м. Одеса, вул. Базарна, 106, к. 313
Тел.: (0482) 33-07-18, 33-07-95, 37-15-27
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 1873 від 20.07.2004р.

ISSN 2072-9812. ПРАЦІ МІЖНАРОД. ГЕОМЕТР. ЦЕНТРУ.
2012. ТОМ 5. №2. 1-60